

Theoretische Physik 2 cheat sheet

Identitäten:

Gradient: $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$

Divergenz: $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$

Rotation: $\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \vec{v}$

Laplace-Operator:

Skalarfeld: $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

Vektorfeld: $\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{v} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{v} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{v} = \Delta v_x \hat{e}_x + \Delta v_y \hat{e}_y + \Delta v_z \hat{e}_z$

Produktregeln:

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u})$$

$$\nabla \cdot (f\vec{v}) = f (\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla \times (f\vec{v}) = f (\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u})$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Wiederholte Anwendung:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0} \quad (\text{Potentialfelder sind wirbelfrei})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \quad (\text{Wirbelfelder sind quellenfrei})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

Weitere Identitäten:

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla_{\vec{v}}(\vec{u} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} = (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Poisson Klammer:

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\} \quad (\text{Bilinearitat})$$

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \Rightarrow \{f, f\} = 0 \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad (\text{Produktregel})$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} = \{f, g\} \quad (\text{Invarianz})$$

Fundamentale Poisson Klammern:

$$\{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0$$

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$

Triviale Beziehungen:

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_k}{\partial p_l} = \delta_{kl}$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0$$

Die Poisson Klammer als Differentialoperator: $\{g, h\} = D_g h$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

Totale Ableitung nach der Zeit einer beliebigen Observablen F :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Einsetzen der Hamilton Gleichungen:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Eine Observable ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn gilt:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Wir können die Hamiltonschen Gleichungen auch über die Poisson Klammern definieren:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Hamilton mit Lagrange:

$$H(q, p) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) \quad \text{mit} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Lagrange 1. Art:

Lagrange: $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$$

Das sind j Koordinaten, p Multiplikatoren $\rightarrow$ Gleichungen für $j + p$ Unbekannte $\rightarrow$ die fehlenden Bestimmungsgleichungen sind die p Zwangsbedingungen

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \dot{q}_m + b_{it} = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Äquivalent dazu:

$$\sum_{m=1}^j a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0$$

Die Lagrange Multiplikatoren liefern die generalisierte Zwangskraft

$$\overline{Q}_m = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im}$$

Lagrange Multiplikatoren in holonomen Systemen:

p holonome Zwänge f_i auf generalisierte Koordinaten umschreiben:

$$\overline{f}_i(q_1, \dots, q_j, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Damit gilt

$$d\overline{f}_i = \sum_{m=1}^j \frac{\partial \overline{f}_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial \overline{f}_i}{\partial t} dt = 0$$

$$\rightarrow a_{im} = \frac{\partial \overline{f}_i}{\partial q_m}, \quad b_{it} = \frac{\partial \overline{f}_i}{\partial t}$$

Lagrange 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$$

Noether-Theorem:

Überprüfe Symmetrie: $L' = L + \epsilon \cdot \frac{d}{dt} f$

$$\text{Erhaltungsgröße: } 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f \right)$$

Kanonische Transformationen:

Kriterien für Kanonizität: $\{\bar{q}_i, \bar{p}_i\} = \delta_{ij}$, $\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0$

Transformationsformeln:

	$\bar{q}$	$\bar{p}$
q	$F_1(q, \bar{q}, t)$ $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \bar{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i}$	$F_2(q, \bar{p}, t)$ $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}$
p	$F_3(p, \bar{q}, t)$ $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \bar{p}_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}_i}$	$F_4(p, \bar{p}, t)$ $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \bar{q}_i = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_i}$