

Theoretische Physik II - Skript

Laura Scholl und Furkan Cetin

Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrange-Formalismus	4
1.1	Grundidee	4
1.2	Variationsrechnung	4
1.2.1	Beispiel	6
1.3	Hamiltonsches Prinzip	6
1.3.1	Kommentare	6
1.4	Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen	7
1.4.1	Massenpunkt in Potential	7
1.4.2	System wechselwirkender Massenpunkte	7
1.4.3	Mathematisches Pendel im Fahrstuhl	7
1.5	Vereinfachte Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung	8
1.6	Kommentare	9
2	Symmetrien und Erhaltungssätze	9
2.1	Symmetriemotivation der Wirkung	9
2.1.1	Freier Massenpunkt	9
2.1.2	Mehrere Massenpunkte	10
2.2	Energieerhaltung	10
2.3	Satz von Euler (M)	11
2.4	Energieerhaltung (Fortsetzung)	12
2.5	Erhaltung der verallgemeinerten Impulse	12
2.6	Noether-Theorem	13
2.7	Mechanische Ähnlichkeit	14
2.7.1	Anwendung	15
2.8	Virialsatz	16
3	Trägheitstensor	17
3.1	Trägheitsmoment und Satz von Steiner	17
3.2	Trägheitstensor	20
3.3	Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit	21
3.4	Hauptträgheitsachsen	21
3.5	Das Trägheitsellipsoid	22
3.6	Trägheitstensor und Drehimpuls - mehr zur geometrischen Ausdehnung	24

4	Kreisel	25
4.1	Eulergleichungen	25
4.2	Freier Kreisel - qualitativ	26
4.3	Freier Kreisel - analytisch	28
4.4	Schwerer Kreisel - vereinfacht	29
4.5	Eulersche Winkel	30
4.6	Schwerer Kreisel - exakt	31
5	D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen der 1. und 2. Art	34
5.1	Arten von Zwangsbedingungen	34
5.1.1	Zwänge	35
5.2	Prinzip der virtuellen Arbeit und d'Alembertsches Prinzip	36
5.3	d'Alembert mit verallgemeinerten Koordinaten und Kräften	38
5.4	Lagrange-Gleichungen 1. Art	40
5.5	Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte	41
5.6	Lagrange-Gleichungen 2. Art	41
5.7	Lagrange-Multiplikatoren - allgemeine Sicht	42
6	Hamilton Formalismus	43
6.1	Legendre-Transformation	43
6.2	Hamilton Funktion	46
6.3	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und Phasenraum	47
7	Poisson-Klammer	49
7.1	Definition und erste Anwendungen	49
7.2	Die Poissonklammer als Lie-Algebra-Operation	50
7.3	Poissonklammer und Vektorfelder	50
7.4	Die Drehimpuls-Lie-Algebra in der Hamilton-Mechanik	52
7.5	Satz von Liouville	54
8	Hamilton-Mechanik in Differentialformen	56
8.1	Tangential- und Kotangentialraum (M)	56
8.2	Vektorfelder und 1-Formen (M)	57
8.3	Höhere p-Formen (M)	58
8.4	Hamilton-Mechanik in Formen	59
9	Kanonische Transformationen, Integrabilität, Chaos	62
9.1	Kanonische Transformationen	62
9.2	Integrabilität	65
9.3	Chaos	66
10	Schwingungen und Kontinua	68
10.1	Kleine Schwingungen allgemeiner Systeme	68
10.1.1	Ein Freiheitsgrad	68
10.1.2	Viele Freiheitsgrade	68
10.2	Lineare Kette	70
10.3	Schwingende Saite	72
10.4	Ideale Hydrodynamik (Fluid Dynamics)	73
10.5	Potentialströmungen	75
10.6	Navier-Stokes-Gleichung	76

11 Statistische Mechanik: Kinetik	76
11.1 Verteilungsfunktion im Phasenraum	76
11.2 Boltzmann-Gleichung	77
11.3 Delta-Funktion (M)	78
11.4 Maxwell-Boltzmann-Verteilung	80
11.5 Mittelwert (M)	81
11.6 Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit äußerer, konservativer Kraft	83
11.7 Diffusion	83
12 Statistische Mechanik: Thermodynamische Gesamtheiten	
(Statistical Ensembles)	84
12.1 Der Γ -Raum	84
12.2 Wahrscheinlichkeit (M)	84
12.3 Maß und Wahrscheinlichkeitsraum	85
12.4 Das mikrokanonische Ensemble	85
12.5 Boltzmann-Verteilung als wahrscheinlichste Verteilung	86
12.6 Das kanonische Ensemble	88

1 Lagrange-Formalismus

1.1 Grundidee

Im Mittelpunkt unserer Analyse des Lagrange-Formalismus steht das sogenannte Wirkungsfunktional S . Dieses ist eine Abbildung, die einer (ganzen) Trajektorie eine reelle Zahl zuordnet. Dieses beschreiben wir mithilfe der Lagrange-Funktion L .

Die zentrale Aussage dieses Formalismus besteht im Wirkungsprinzip, auch Hamilton-Prinzip genannt, das besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.

1.2 Variationsrechnung

Wir erinnern uns an den Funktionsbegriff y , der jedem Vektor $\vec{x}$ eine reelle Zahl zuordnet.

$$y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y : \vec{x} \longmapsto y(\vec{x})$$

Ein Funktional F ist ähnlich definiert, aber wir ersetzen $\mathbb{R}^n$ durch Funktionen. Diese Menge von Funktionen können wir als Vektorraum $\mathbb{V}$ auffassen.

$$F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F : y \longmapsto F[y]$$

Wir wählen als Beispiel, um uns dieses recht abstrakte Konstrukt zu visualisieren: Sei

$$y(x) = x^2$$

und unser Funktional

$$F[y] = \int_0^1 [xy(x)^2 + y'(x)^2] dx.$$

Wir erhalten

$$F[y] = \int_0^1 [x^5 + 4x^2] dx = 1,5.$$

Stellen wir uns nun vor, wir interessieren uns für die Länge eines Weges im Gebirge. Sei $\vec{x}(\tau) = \{x_1(\tau), x_2(\tau)\}$ die Projektion eines Weges in drei Dimensionen auf die horizontale Ebene (wie wir es von Landkarten kennen). Ist nun auch eine Funktion $z(\vec{x})$ gegeben, die einem Punkt in der Ebene eine Höhe zuordnet, können wir den dreidimensionalen Weg definieren.

$$\vec{y}(\tau) = \{x_1(\tau), x_2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\}$$

$$F_{\text{Gebirge}}[\vec{x}] = F[\vec{y}(\vec{x})] = \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(\tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(\tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x_1(\tau), x_2(\tau))}{\partial \tau}\right)^2}$$

Das Resultat ist die gesuchte Weglänge (eine reelle Zahl), die unser Wanderer im Gebirge zurücklegt.

Nun wollen wir aber den Weg, den wir zukünftig zurücklegen wollen, minimieren, bzw. extremalisieren.

Sei dafür der Definitionsbereich der Raum zweifach differenzierbare Funktion auf $[0; 1]$ mit $y(0) = y_a$ und $y(1) = y_b$.

Nehmen wir dafür zunächst an, wir haben das Extremum schon gefunden, also ein y_0 , das $F[y]$ extremalisiert. Unser Funktional F ist dabei wie folgt definiert:

$$F[y] = \int_0^1 f(y, y', x) dx.$$

Sei dafür δy eine zweifach differenzierbare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$. Dann erfüllt die Funktion

$$y_\alpha = y_0 + \alpha \delta y$$

unsere Rahmenbedingungen. Diese unterscheidet sich um eine infinitesimale Funktion δy von y . Damit nun F ein Extremum hat, muss seine Ableitung null werden:

$$\frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] = 0.$$

Nun benutzen wir als y y_α , entwickeln nach Taylor und leiten nach α ab:

$$\begin{aligned} F[y_\alpha] &= \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \alpha \delta y' \right] + O(\alpha^2) \\ \frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] &= \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right). \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden können wir nun mit partieller Integration umformen

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

und wir sehen, dass der Randterm wegen $\delta y(1) = \delta y(0) = 0$ verschwindet.

Wir setzen wieder in die ursprüngliche Form ein und erhalten:

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

δy muss für alle infinitesimalen Variationen gelten, und damit das Integral nach dem Variationsprinzip verschwinden kann, muss der Integrand selbst verschwinden, und es bleibt die **Euler-Lagrange Gleichung**.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1.2.1 Beispiel

$$f(y, y', x) = y^2 + y'^2 \xrightarrow{\text{Euler.DGL.}} \frac{d}{dx}(2y') - 2y = 0$$

bzw. $0 = y'' - y$. Das ist unsere Dgl für Funktion y . Dies soll von y_0 gelöst werden.

Beim Ableiten nach y, y' betrachten wir diese Größen als unabhängige Variablen.

1.3 Hamiltonsches Prinzip

Für jedes (in gewisser Klasse) mechanische System mit s Freiheitsgraden existiert eine Lagrange Funktion L ,

$$L = L(q, \dot{q}, t), \quad q \hat{=} \{q_1, \dots, q_s\}$$

so dass gilt: Die phys. Bewegung von $q = q^{(1)}$ bei $t = t_1$ nach $q = q^{(2)}$ bei $t = t_2$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

stationär wird (Minimum für kleine Bahnabschnitte).

1.3.1 Kommentare

$$[L] = \text{Energie} ; [L \cdot dt] = \underbrace{\text{Energie} \cdot \text{Zeit}}_{\text{Wirkung}}$$

Der Begriff der Wirkung beherrscht die gesamte moderne Physik.

Wir wissen schon: Hamilton Prinzip $\Rightarrow$ Eulersche Dgl:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Eulersche DGL $\equiv$ Euler-Lagrange-Glg. $\equiv$ Lagrange Glg. der 2. Art

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \xrightarrow{\text{verallgemeinert für } s > 1} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, s$$

1.4 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

- Fundamentaler Fakt: $L = T - V$, kin. – pot. Energie
- L bzw. S fundamental $\Rightarrow$ Herleitung unmöglich
- Aber: Begründung aus Symmetrie Argumenten
- rein technisch: existiert "Herleitung aus Newton" ($\rightarrow$ später)
||Hamilton-Prinzip ist fundamentaler als Newton||

1.4.1 Massenpunkt in Potential

Im Folgenden leiten wir die Grundgleichung der Mechanik mit Hilfe des Hamilton Prinzips her.

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(x) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L - \frac{\partial}{\partial x^i} L &= 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} m \dot{x}^i + \frac{\partial V}{\partial x^i} &= 0 \\ \Rightarrow m \ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ \Rightarrow \vec{F} &= m \ddot{\vec{x}} \end{aligned}$$

1.4.2 System wechselwirkender Massenpunkte

Jetzt haben wir

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2, \quad V = \sum_{a>b} V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

und wieder $L = T - V$. Die Euler-Lagrange-Gleichung für die Koordinate x_a^i lautet

$$m_a \cdot \ddot{x}_a^i + \frac{\partial}{\partial x_a^i} \left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) \right) = 0$$

Die drei Gleichungen für $i = 1, 2, 3$ lassen sich zu dem vertrauten Ergebnis

$$m_a \cdot \ddot{\vec{x}}_a = \vec{F}_a \quad \text{mit} \quad \vec{F}_a = \sum_b \vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

1.4.3 Mathematisches Pendel im Fahrstuhl

Im Folgenden betrachten wir ein Pendel, das an der Decke eines mit a beschleunigten Fahrstuhls aufgehängt ist. Das Pendel schwinde in der $x - y$ -Ebene, v_y sei $a \cdot t$. Wir finden

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \left(\frac{d}{dt}(l \cdot \sin(\varphi)), a \cdot t - \frac{d}{dt}(l \cdot \cos(\varphi)) \right)$$

und

$$V = m \cdot g \cdot \left(\frac{a}{2} t^2 - l \cdot \cos(\varphi) \right).$$

Sehr kompakt geschrieben lautet nun die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \right),$$

wobei wir natürlich die versteckte Abhängigkeit von φ beachten müssen:

$$\left(\frac{m}{2}\dot{v}^2 - V\right) = \frac{m}{2} \cdot [l^2 \cos^2(\varphi)\dot{\varphi}^2 + (a \cdot t + l \cdot \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2] - m \cdot g \cdot \left(\frac{a}{2}t^2 - l \cdot \cos(\varphi)\right)$$

Eine kurze Rechnung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (l^2 \cdot 2 \cdot \dot{\varphi} + 2a \cdot t \cdot l \sin(\varphi)) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{m}{2} \cdot 2a \cdot t \cdot l \cdot \dot{\varphi} \sin(\varphi) + m \cdot g \cdot l \cos(\varphi) \right) \\ 0 &= m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot a \cdot l \sin(\varphi) + m \cdot a \cdot l \cdot t \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} - m \cdot a \cdot l \cdot t \cdot \dot{\varphi} \cos(\varphi) + m \cdot g \cdot l \sin(\varphi) \\ 0 &= m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot a \cdot l \sin \varphi + m \cdot a \cdot t \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi - m \cdot a \cdot t \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi + m \cdot g \cdot l \sin \varphi \end{aligned}$$

und schließlich:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot (g + a) \sin \varphi$$

Zwänge, sogar zeitabhängige, sind leicht zu berücksichtigen

Vorlesung 3, 20.04.21

1.5 Vereinfachte Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Sei $q(t)$ eine Trajektorie. Sei $\delta q(t)$ eine Variation der Trajektorie $q(t)$.

Nun verändern wir diese Trajektorie q geringfügig, so dass $q(t) + \delta q(t)$ die neue Trajektorie ist. Dies impliziert natürlich auch eine Änderung der Wirkung (des Wirkungsfunktional) S . Da wir die Trajektorie nur minimal verändert haben, ändert sich auch S nur minimal. Wir definieren δS als Differenz von alter und neuer Wirkung.

$$q(t) \longrightarrow \underbrace{q(t) + \delta q(t)}_{\text{neue Trajektorie}} \quad | \quad S \rightarrow S + \delta S$$

Stationarität von S bedeutet:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \delta L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right] \end{aligned}$$

partielle Integration unter Ausnutzung von $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q(t_2) - \delta q(t_1) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]}_{\text{muss identisch Null sein}} \delta q \end{aligned}$$

1.6 Kommentare

1. Argumente von L :

- $\ddot{q}$, $\ddot{\dot{q}}$, etc. dürfen nicht vorkommen, weil sonst Bewegungsgleichung zu hoher Ordnung sein würden und Anfangsbedingungen $q(t=0)$, $\dot{q}(t=0)$ nicht mehr reichen

2. Totale Zeitableitungen:

- Seien L und L' zwei Lagrange Funktionen und $L' = L + \frac{d}{dt}(f(q, t))$. f darf nun, wie oben erklärt, nur von q , nicht von $\dot{q}$, abhängen.
 - Für die entsprechenden Wirkungen gilt:

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f = S + [f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1)]$$

wobei der Ausdruck in **Klammern** sich im Falle einer Variation δq nicht ändert. Also gilt:

$$\delta S' = \delta S$$

so dass L' phys. gleichwertig mit L ist. Anders gesagt ist L nur bis auf eine totale Zeitableitung definiert.

3. Bedeutung von S in der Quantenmechanik:

- (siehe Vorlesungsskript)

2 Symmetrien und Erhaltungssätze

2.1 Symmetriemotivation der Wirkung

2.1.1 Freier Massenpunkt

Homogenität von Raum und Zeit $\Rightarrow L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$

Isotropie des Raumes $\Rightarrow L(\vec{v}) = L(\vec{v}^2)$

Invarianz unter (kleinen, infinitesimalen) Galilei-Boosts:

Diese im Moment noch allgemeine Funktion von $\vec{v}^2$ lässt sich weiter einschränken, wenn wir (kleine) Galilei-Boosts $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ betrachten:

$$\begin{aligned} L\vec{v}^2 &\rightarrow L(\vec{v}')^2 = L(\vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2) \\ &= L(\vec{v}^2) + \left(\frac{\partial L}{\partial (\vec{v}^2)} \right) (2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) + \mathcal{O}(|\vec{\varepsilon}|^2) \end{aligned}$$

Damit dies eine Symmetrie ist, wollen wir, wie oben erklärt, fordern, dass sich L nur um eine totale Ableitung ändert.

Also fordern wir:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial (\vec{v}^2)} \right) (2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) = \frac{d}{dt} \left\{ f(\vec{v}, \vec{x}) \right\}$$

Damit die explizite $\vec{x}$ Abhängigkeit nach dem Ableiten verschwindet, darf f höchstens linear von $\vec{x}$ abhängen, und gar nicht von $\vec{v}$, da sich sonst ein Beitrag mit $\vec{v}$ ergeben würde.

Es lässt sich schließen:

$$f(\vec{v}, \vec{x}) = \text{const.} \cdot (2\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon})$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\vec{v}^2)} (2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) = \frac{d}{dt} \left(\text{const.} \cdot (2\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon}) \right) = \text{const.} \cdot (2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon})$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\vec{v}^2)} = \text{const.} \quad ; \quad \text{Def.: } \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} \equiv \frac{m}{2}$$

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

2.1.2 Mehrere Massenpunkte

Wenn wir mehrere unabhängige Systeme gleichzeitig betrachten, so können wir die jeweiligen Lagrange-Funktionen schlicht addieren:

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L_1(q_1, \dot{q}_1, t) + L_2(q_2, \dot{q}_2, t)$$

Anwendung von $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}$ auf L liefert wegen der Linearität ELGs, welche den ELGs der beiden Teilsysteme entsprechen.

Mehrere Massenpunkte:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2$$

(also $L = T$)

Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form

$$V = \sum_{a < b} V_{ab} (|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

respektiert die Galilei-Invarianz.

$\Rightarrow$ plausibles L : $\boxed{L = T - V}$

2.2 Energieerhaltung

"Homogenität der Zeit" $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} \text{Invarianz; Symmetrie} \\ t \longrightarrow t + \varepsilon \end{array}}$

Implementation in den Lagrange-Formalismus:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}) \quad | \quad q \hat{=} \{q_1, \dots, q_s\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i}_{\text{wegen ELG}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\dot{q}_i) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung:

Hängt eine Lagrange-Fkt nicht explizit von t ab, so ist die Größe $E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ erhalten,

also $\frac{d}{dt} E = 0$.

2.3 Satz von Euler (M)

Definition: Eine Funktion f von n Variablen heißt homogen vom Grad k , falls $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$

Unser zentrales Beispiel:

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$\Rightarrow$ homogen vom Grad 2 in den Variablen $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$

Satz von Euler: $f(x_1, \dots, x_n)$ homogen vom Grad k

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f$$

Begründung: Leite die Homogenitätsaussage nach α ab:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha^k f(x_1, \dots, x_n) \right) \Rightarrow \sum_i \frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{\partial \alpha x_i} \cdot \frac{\partial(\alpha x_i)}{\partial \alpha} = k \alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Setzen wir nun $\alpha = 1$, so folgt die Behauptung.

Herleitung

Betrachte die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto f(tx)$. Aus der mehrdimensionalen Kettenregel folgt

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = \left. \frac{df(tx)}{dt} \right|_{t=1} = \left. \frac{dt^\lambda f(x)}{dt} \right|_{t=1} = \lambda t^{\lambda-1} f(x) \Big|_{t=1} = \lambda f(x)$$

wobei die zweite Gleichheit aus der vorausgesetzten Homogenität von f folgt.

Anmerkung: Eine Funktion heißt homogen vom Grad k , wenn bei proportionaler Änderung aller Variablen um einen Proportionalitätsfaktor t sich der Funktionswert um den Faktor t^k ändert. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = x^p$, welche homogen vom Grad $k = p$ ist.

Beispiel

Sei $f(x, y) = x^2 + 2xy$, dann

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (x^2 + 2xy) = \lambda^2 f(x, y)$$

also ist $f(x, y)$ eine homogene Funktion zweiten Grades.

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(x + y); \quad f'_y = 2x \\ \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x(x + y) + 2xy = 2(x^2 + 2xy) = 2f(x, y). \end{aligned}$$

2.4 Energieerhaltung (Fortsetzung)

Annahme: L habe die Form: $L = T - V$

$$L = T - V \equiv \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

Es sind alle q 's gemeint

Term ergibt sich typischerweise aus $\sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2$ in verallgemeinerten Koordinaten

Diese Form ergibt sich, wenn wir $\sum_a \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2$ in verallgemeinerte Koordinaten umschreiben. Mit dieser Annahme und der Anwendung des Satzes von Euler gilt (T ist homogen vom Grad 2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T.$$

Alternativ dazu können wir auch explizit nachrechnen:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i = \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \delta_{ik} \dot{q}_i = f_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T$$

Es folgt somit

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V,$$

wie erhofft.

2.5 Erhaltung der verallgemeinerten Impulse

"Homogenität des Raumes" $\Rightarrow$

Invarianz; Symmetrie $q_1 \longrightarrow q_1 + \varepsilon$

In einem $q_1, \dots, q_s$ parametrisierten System bezeichnet man die Größen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

als verallgemeinerten Impuls. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der uns bekannten Situation

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i.$$

Um den folgenden Prozess besser zu verstehen und die Homogenität des Raumes in den Lagrange-Formalismus zu implementieren, führen wir den Begriff der zyklischen Koordinate ein.

Zyklisch bedeutet schlicht und ergreifend, dass sie nicht explizit in L vorkommt; ihre Ableitung darf das wiederum.

Implementation in den Lagrange-Formalismus:

$$L = L(q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \quad q_1 \rightarrow q_1 + \varepsilon$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \text{und per Annahme} \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0.$$

Damit ist also $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ erhalten.

Dies stimmt auch mit unserer Intuition überein, wie wir es z.B. vom schrägen Wurf im Schwerfeld kennen; der Impuls in x- und y-Richtung ist erhalten.

Ein weiteres Beispiel für die Erhaltung des verallgemeinerten Impulses ist der Massenpunkt im Zentralpotential:

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) - V(r).$$

Dabei fällt auf, dass φ zyklisch ist und somit gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Das ist genau der Betrag des Drehimpulses.

Wir erhalten nun als Zusammenstellung der Galilei-Transformationen und ihren dazugehörigen Erhaltungsgrößen folgende Übersicht.

Symmetrie	Galilei-Transformation	Erhaltungsgröße
Homogenität der Zeit	Zeittranslation	Energie
Homogenität des Raumes	Translation	Impuls
Isotropie des Raumes	Rotation	Drehimpuls
	Boost	$\vec{x}_s - \vec{v}_s t$

2.6 Noether-Theorem

Zunächst definieren wir die **kontinuierliche Symmetrie** mit Hilfe der Translation

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) = q(t) + \varepsilon \chi(t).$$

Wichtig hierbei ist, dass $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sodass wir den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ bilden können. Nun fordern wir, dass

$$\begin{aligned} \delta L &= L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \\ &= L(q + \varepsilon \chi, \dot{q} + \varepsilon \dot{\chi}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \frac{d}{dt} f \end{aligned}$$

Unser **Kriterium für Symmetrie** ist also $\delta L = \varepsilon \frac{df}{dt}$.

Im nächsten Schritt variieren wir gemäß Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \delta L &= \varepsilon \frac{d}{dt} f = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \end{aligned}$$

Wir klammern aus und erhalten

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f \right) = \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f \right).$$

Sei die Transformation mit $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$ eine Symmetrie (das heißt, dass $\delta L = \varepsilon \cdot \frac{d}{dt} f$), dann gilt das **Noether-Theorem**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i - f \right) = 0$$

Beispiel

Betrachten wir ein L ohne explizite Zeitabhängigkeit, sodass die entsprechende Transformation ist

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t + \varepsilon) = q(t) + \dot{q}(t) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

sodass (denn $\delta q = q'(t) - q(t)$)

$$\delta q = \dot{q} \cdot \varepsilon \equiv \varepsilon \chi \quad \text{bzw.} \quad \chi = \dot{q}.$$

Jetzt berechnen wir δL :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} \right) = \varepsilon \cdot \frac{d}{dt} L.$$

Damit haben wir gefunden, dass $f = L$ gilt und unsere Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = E$$

wie erwartet.

2.7 Mechanische Ähnlichkeit

Betrachten wir ein System mit Lagrange-Funktion L und Potenzial V , das eine homogene Funktion vom Grad k ist.

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{x}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n), \quad t \mapsto x(t)$$

Betrachten wir nun die Transformation

$$x \rightarrow \alpha x, \quad t \rightarrow \beta t$$

mit α, β , als fest gewählten Konstanten.

Damit erhalten wir die neue Bewegung

$$t \mapsto x(t) \quad \longrightarrow \quad \beta t \mapsto \alpha x(t),$$

also mit dem Variablenwechsel $t' = \beta t$ und Umbenennung $t' \rightarrow t$

$$t \mapsto \alpha x\left(\frac{t}{\beta}\right).$$

Die kinetische und potenzielle Energie transformieren sich dementsprechend zu

$$T \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \quad V \rightarrow \alpha^k V$$

und wir fordern, dass

$$\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2.$$

Daraus folgt, dass $L \rightarrow \alpha^k L$, und die Euler-Lagrange-Gleichung ist jeweils in L (Grad 1), x (Grad -1) und t (Grad 0) homogen.

Falls also die alte Bewegung eine Lösung darstellt und falls $\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ gilt, so ist die neue Bewegung wieder eine Lösung. Diese Situation nennen wir **mechanische Ähnlichkeit**, also wenn die neue transformierte Trajektorie wieder eine physikalische Bewegung (löst ELG) beschreibt.

Dann ist die ELG $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ unter unserer Trf. invariant.

→ weil die ELG in L, x, t homogen ist vom Grad 1, -1, 0

Man spricht dann von mechanischer Ähnlichkeit".

Also: wähle $\beta = \beta(\alpha) = \alpha^{1-\frac{k}{2}} \Rightarrow$ neue, transformierte Trajektorie ist wieder Lösung.

2.7.1 Anwendung

- Sei X eine typische Länge einer Bewegung
- Sei T eine typische Zeit einer Bewegung

Nach Transformation: $X' = \alpha X$; $T' = \beta T$

$$\frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} = \left(\frac{X'}{X} \right)^{1-\frac{k}{2}}$$

⇒ bei mechanischer Ähnlichkeit gilt

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X} \right)^{1-\frac{k}{2}}$$

Zu einer Bewegung mit typischer Zeit/Länge $\frac{T}{X}$, gibt es eine Bewegung mit typischer Zeit/Länge $\frac{T'}{X'}$, so dass gilt

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X} \right)^{1-\frac{k}{2}}.$$

Beispiel:

- Harmonischer Oszillator: $V \sim x^2 \Rightarrow k = 2$; $\frac{T'}{T} = 1$
- Freier Fall: $V \sim x \Rightarrow k = 1$; $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$
(Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Fallhöhen)
- Gravitation: $V \sim \frac{1}{x} \Rightarrow k = -1$; $\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X} \right)^{\frac{3}{2}}$
⇒ Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie Kuben der Bahngrößen (vgl. 3. Keplersches Gesetz)

Einschub:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Symm. Gruppe Kepler: $SO(4)$

(ungebunden: $SO(1,3)$)

2.8 Virialsatz

Definition einer zeitgemittelten Größe:

$$\langle A \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A(t')$$

besonders einfach, falls A totale Zeitableitung ist.

- konkret interessiert uns $\langle T \rangle$; $T \equiv$ kin. Energie
- wollen T umschreiben in totale Zeitableitung

$$2T = mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x = \frac{d}{dt}(px) + x \frac{\partial V}{\partial x}$$

[Problemlos verallgemeinerbar auf $S > 1$]

$$\Rightarrow \langle 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle = \langle \frac{d}{dt}(px) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (px|_{x=t} - px|_{x=0}) = 0$$

falls p und x beschränkt

$\Rightarrow$ Virialsatz: Für Bewegungen in einem beschränkten Gebiet mit beschränkten Geschwindigkeiten gilt:

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_a \vec{x}_a \cdot \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a}}_{\equiv \vec{\nabla}_a V} \right\rangle$$

$$\text{Das Virial: } \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i}$$

$$\Rightarrow \text{Falls } V \text{ homogen vom Grad } k \xrightarrow{\text{Satz von Euler}} 2\langle T \rangle = k\langle V \rangle$$

Beispiel:

- Oszillator $\langle T \rangle = \langle V \rangle$
- Gravitation $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle \Rightarrow$ ergibt natürlichen Zusammenhang zwischen mittlerer Stern-
geschwindigkeit und Galaxienmasse

3 Trägheitstensor

3.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

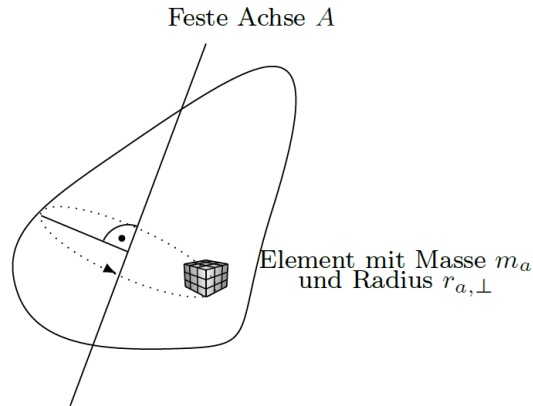


Abbildung 1: Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse A. Der Körper kann sich nur um diese feste Achse drehen. Für die infinitesimalen Massenelemente gilt: $m_a = \rho_a \Delta V_a$

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \cdot v_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} \cdot \omega^2 \cdot r_{a,\perp}^2 = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega^2 \quad \text{mit } I_A \equiv \sum_a m_a \cdot r_{a,\perp}^2$$

wobei I_A das Trägheitsmoment bzgl. der Achse A darstellt.

$$\Delta V_a \rightarrow 0 \Rightarrow I_A = \int d^3 \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2$$

Einziger Freiheitsgrad: φ (mit $\dot{\varphi} = \omega$)

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} I_A \cdot \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_A \cdot \ddot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi} V(\varphi)}$$

wobei $V(\varphi) = \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi))$.

Wir wollen $\frac{dV}{d\varphi}$ besser verstehen: Dazu:

$$\begin{aligned} V(\varphi + \delta\varphi) &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{r}_a) \\ &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a(\varphi)) \quad | \delta\vec{\varphi} \equiv \text{Vektor mit Länge } \delta\varphi \text{ in A-Richtung} \\ &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi)) + \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a(\varphi)) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \\ \Rightarrow V(\varphi + \delta\varphi) - V(\varphi) &= \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -\frac{dV}{d\varphi} &= -\lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \sum_a \frac{(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a)}{\delta\varphi} \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \quad | \quad \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta\varphi} \equiv \vec{e}_A - \text{Einheitsvektor in A-Richtung} \\
&= \sum_a \underbrace{\epsilon^{ijk}}_{\epsilon^{jki}} (\vec{e}_A)^j (\vec{r}_a)^k (\vec{F}_a)^i \\
&= \underbrace{\vec{e}_A \cdot \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{F}_a)}_{\text{Projektion des Gesamtdrehmoments } \vec{M} \text{ auf A}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (I_A \cdot \dot{\varphi}) = \vec{e}_A \cdot \vec{M}$$

Nun teilen wir $\vec{r}$ in zu A parallele und orthogonale Komponenten auf, um uns im Folgenden Arbeit zu sparen.

Erinnerung: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ (für Massenpunkt)

$$\vec{e}_A \cdot \vec{L} = m \cdot \vec{e}_A \cdot \left[(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times \vec{v} \right]$$

$\vec{r}_{\parallel}$ irrelevant, da $(\vec{r}_{\parallel} \times \vec{v}) \perp \vec{e}_A$ und der Parallel-Term somit 0 fällt.

Außerdem gilt: $\vec{r}_{\perp} \times \vec{v} = r_{\perp}^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_A$ | mit $|\vec{v}| = r_{\perp} \cdot \dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{e}_A \cdot \vec{L} = m \cdot r_{\perp}^2 \cdot \dot{\varphi}$$

Nach Summation über a : $\boxed{\vec{e}_A \cdot \vec{L} = I_A \cdot \dot{\varphi}}$

$$\vec{e}_A \cdot \vec{L} = \sum_a m_a \cdot r_{a,\perp}^2 \cdot \dot{\varphi} = I_A \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{e}_A \cdot \vec{L}) = \vec{e}_A \cdot \vec{M}$$

Nützliche Beziehung: I_S bekannt ; Was ist I_A ?

→ $I_S \equiv$ Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse

→ $I_A \equiv$ Trägheitsmoment um die feste Achse A

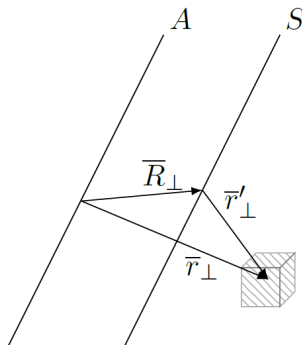


Abbildung 2: Trägheitsmoment bzgl. A lässt sich bestimmen mit dem Trägheitsmoment bzgl. S

Nun können wir leicht das Trägheitsmoment unseres Körpers bezüglich der zu A parallelen Achse bestimmen. Die Relation ist auch als **Satz von Steiner** bekannt.

$$\begin{aligned}
 I_A &= \sum_a m_a \cdot r_{a,\perp}^2 \\
 &= \sum_a m_a \cdot \underbrace{\left(\vec{r}_{a,\perp} - \vec{R}_\perp \right)^2}_{\substack{\text{Mischterm fällt} \\ \text{beim Summieren weg,} \\ \text{da Schwerpunktsachse}}} \\
 I_A &= \sum_a m_a \cdot R_\perp^2 + \sum_a m_a \cdot r_{a,\perp}^2 \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{I_A = M \cdot R_\perp^2 + I_S} \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \text{Satz von Steiner}
 \end{aligned}$$

3.2 Trägheitstensor

Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich zusammen aus Rotation und Translation des Schwerpunkts, also

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} [\vec{v}^2 + 2\vec{v}(\vec{\omega} \times \vec{r}_a) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2]$$

Der Term $\sum_a m_a \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)$ verschwindet, denn $\sum_a m_a \vec{r}_a = 0$ (denn wir befinden uns im Schwerpunkt des Körpers, sodass alle $M m_a r_a$ sich aufheben).

Es folgt, dass

$$T = \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 = \frac{M}{2} \vec{v}^2 + I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Dabei ist I_{ij} als unser Trägheitstensor definiert als

$$I_{ij} = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot (\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j) dV$$

Speziell für $\vec{r} = (x, y, z)$ erhalten wir I in Matrixdarstellung

$$I = \underbrace{\int dx dy dz \cdot \rho(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xy \\ -xy & x^2 + y^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}}_{\text{diese Schreibweise ist meist für uns Physiker praktischer}}$$

Beispiel: Würfel mit homogener Dichte

Im Folgenden berechnen wir den Trägheitstensor eines Würfels mit der Kantenlänge $2a$.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho \int_V (y^2 + z^2) dV = \rho \frac{16}{3} a^5 \\ I_{yy} &= \rho \int_V (x^2 + z^2) dV = \rho \frac{16}{3} a^5 \\ I_{zz} &= \rho \int_V (y^2 + x^2) dV = \rho \frac{16}{3} a^5 \\ I_{xy} &= I_{yx} = -\rho \int_V yx dV = 0 \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\rho \int_V zy dV = 0 \\ I_{zx} &= I_{xz} = -\rho \int_V xz dV = 0 \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a dx &= [x]_{-a}^a = 2a \\ \int_{-a}^a x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^a = 0 \\ \int_V x^2 dV &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a x^2 dz dy dx = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-a}^a dy \int_{-a}^a dz = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a (2a)^2 = \frac{8}{3} a^5 \end{aligned}$$

Analoges gilt in y - und z -Richtung. Mit diesen Ergebnissen, der Kantenlänge $d = 2a$ und der Masse $m = \rho d^3$ des Würfels bekommt der Tensor die Form

$$I = \frac{\rho}{6} d^5 \mathbf{1} = \frac{m}{6} d^2 \mathbf{1}.$$

3.3 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

Sei $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Wir definieren ein Skalarprodukt

$$x, y \mapsto \langle x, y \rangle \equiv x^\dagger y \in \mathbb{C}.$$

Wir benutzen die Notation $M^\dagger \equiv \bar{M}^T$, mit $\dagger$ als die komplex konjugierte und transponierte Matrix.

Des Weiteren führen wir den Begriff der **hermiteschen Matrizen** ein, für die gilt $H^\dagger = H$. Diese sind $(n \times n)$ -Matrizen. Unser Ziel ist es, H zu diagonalisieren (was uns der Fundamentalsatz der Algebra stets erlaubt), sodass wir die Gleichung erhalten

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = 0.$$

Die Lösungen nennen wir λ_1 , die Eigenwerte, und erhalten für alle λ_1 eine nichttriviale Lösung $x_1 \in \mathbb{V}$, sodass gilt

$$(H - \lambda_1 \mathbf{1})x_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad Hx_1 = \lambda_1 x_1.$$

Eine wichtige Behauptung ist nun: H bildet das orthogonale Komplement zu x_1 , $\{x_1\}_\perp$ wieder auf $\{x_1\}_\perp$ ab. Diese Behauptung können wir bestätigen mit $y \in \mathbb{V}$, $\langle y, x_1 \rangle = 0$

$$\langle Hy, x_1 \rangle = (Hy)^\dagger x_1 = y^\dagger Hx_1 = \langle y, Hx_1 \rangle = \lambda_1 \langle y, x_1 \rangle.$$

Nach entsprechendem Basiswechsel können wir nun die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix H_1 betrachten, die die Wirkung von H auf den Untervektorraum $\{x_1\}_\perp$ beschreibt. Diese ist wieder hermitesch und wir wiederholen obiges Argument und finden Eigenwerte und Eigenvektoren λ_2, x_2 usw.

Wenn dieser Prozess endet haben wir n Eigenvektoren x_i und wählen diese für unsere neue orthonormale Basis $e_1, \dots, e_n$. Wir bezeichnen Matrizen U , die eine Orthonormalbasis wieder in eine Orthonormalbasis überführen, als **unitär**, also sodass gilt $U^\dagger = U^{-1}$.

Obige Argumentation können wir auch natürlich auf reelle symmetrische Matrizen anwenden, sodass sowohl Eigenwerte als auch Eigenvektoren $\in \mathbb{R}$ sind.

3.4 Hauptträgheitsachsen

Erinnerung: Ein Tensor ist ein geometrisches Objekt, in unserem Fall eines, das die Geometrie und Massenverteilung eines Körpers beschreibt. Ein Tensor transformiert auf eine bestimmte Art unter Drehungen

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl} \quad \text{bzw. in Matrixschreibweise} \quad I' = R \cdot I \cdot R^T = R \cdot I \cdot R^{-1}.$$

Nun besagt ein zentraler Satz aus der linearen Algebra: **Jede symmetrische, reelle Matrix kann durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden.**

Demnach können wir stets

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

erreichen, indem wir den Körper oder das Koordinatensystem entsprechend drehen. Die Elemente I_1, I_2, I_3 nennen wir **Hauptträgheitsmomente** und die Koordinaten $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ die **Hauptträgheitsachsen**.

Im Allgemeinen entsprechen diese den Symmetrieachsen des Körpers, sofern es sie gibt.

Befinden wir uns also im $\mathbb{R}^3$, so hat die Matrix I drei Eigenvektoren $\hat{e}_i$. Diese definieren die Hauptträgheitsachsen und I_i sind die dazugehörigen Hauptträgheitsmomente.

Vorlesung 7, 5.4.2021

3.5 Das Trägheitsellipsoid

Würfel: $I \sim \mathbb{1}$

Kugel: Invariant unter Drehungen

$$I = RIR^{-1} \quad \forall R \in SO(3)$$

I ist ein invarianter Tensor vom Rang 2

Fakt: (ohne Beweis) in $d \geq 3$ ist δ^{ij} (bis auf Normierung) der einzige Invariante Tensor vom Rang 2

$\Rightarrow$ für Kugel gilt $I \sim \mathbb{1}$

genauer: $I^{ij} = \# m R^2 \delta^{ij}$ $\# \equiv$ Zahl; zu berechnen

Weiteres Beispiel: Hantel

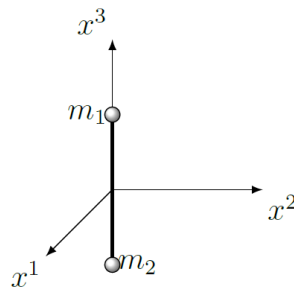


Abbildung 3: Trägheit am Bsp einer Hantel mit masseloser Stange und 2 Massenpunkten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$\begin{aligned} I^{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta^{ij} \vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha})^i (\vec{r}_{\alpha})^j) \\ &= 2m (\delta^{ij} \vec{r}^2 - r^i r^j) \Big|_{\vec{r}_1} = \\ \dots &= 2ma^2 \left(\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{ij} = 2ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

leicht zu raten: realistische Hantel hat $I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ | $\varepsilon \ll 1$

$\rightarrow \varepsilon$ entspricht kleinem Trägheitsmoment bezüglich z-Achse

$\Rightarrow$ Vermutung: $\exists$ allgemeine Beziehung zwischen I und der Form des Körpers

Behauptung: So wie ein Vektor einem Pfeil im $\mathbb{R}^3$ entspricht, so entspricht ein symm. Tensor
vom Rang 2 einer Fläche 2. Grades.

Fläche wird definiert durch: $t^{ij} x^i x^j = 1$ $\leftarrow$ mit $\sum_{ij}$

Setze $t = I$ und gehe ins Hauptachsensystem:

$$I^{ij} x^i x^j = 1 \Rightarrow I_1 (x^1)^2 + I_2 (x^2)^2 + I_3 (x^3)^2 = 1 \quad | \quad \text{alle } I_i > 0$$

$\Rightarrow$ Glg. für ein Ellipsoid (Trägheitsellipsoid)

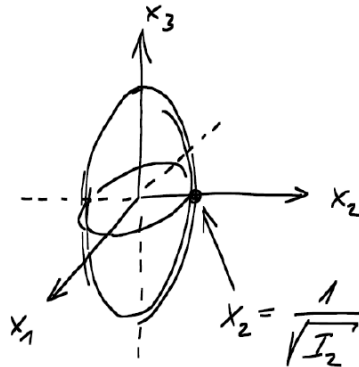


Abbildung 4: Trägheitsellipsoid

Eine durch $\hat{e}$ definierte Achse schneide das Ellipsoid bei $\vec{x}_e$. Dann gilt: $\vec{x}_e = |\vec{x}_e| \hat{e}$

$$\begin{aligned} 1 &= I^{ij} x_e^i x_e^j \\ \Rightarrow 1 &= I^{ij} \hat{e}^i \hat{e}^j |\vec{x}_e|^2 = I_e |\vec{x}_e|^2 \\ \Rightarrow |\vec{x}_e| &= \frac{1}{\sqrt{I_e}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Länge des positiven, im Ellipsoid liegenden Teils einer Achse entspricht der inversen Wurzel des Trägheitsmoments bzgl. dieser Achse.

Also: Achsenteil groß $\rightarrow$ Trägheitsmoment klein $\rightarrow$ Körper hat in orthogonalen Richtungen kleine Ausdehnung

$\Rightarrow$ Trägheitsellipsoid folgt der Form des Körpers

Körper			
Ellipsoid	 (Kugel)	 (stehendes Ellipsoid)	 (abgeflachte Kugel)

Abbildung 5: Illustration: Trägheitsellipsoid folgt der Form des Körpers

3.6 Trägheitstensor und Drehimpuls - mehr zur geometrischen Ausdehnung

Formale Tensor-Definition: Bilineare Abbildung

$$t : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto t^{ij} x^i y^j$$

Unser Fall: I : $(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \mapsto I^{ij} \omega^i \omega^j = 2T$

Also: Trägheitstensor stellt Beziehung von $\vec{\omega}$ und T her.

Im euklidischen Raum kann man Tensor vom Rang 2 als Abb. $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ auffassen.

$$t : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} ; \{x^i\} \mapsto \{t^{ij} x^j\}$$

Unser Fall: I : $\{\omega^i\} \mapsto \{I^{ij} \omega^j\} = \{L^i\}$
 $\uparrow$
 Behauptung

Also: Trägheitstensor stellt Beziehung zwischen $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ her: $L^i = I^{ij} \omega^j$

Zunächst für einzelnen Massenpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= m \varepsilon^{ijk} r^j (\varepsilon^{klm} \omega^l r^m) = \dots = m (\delta^{ij} \vec{r}^2 - r^i r^j) \omega^j \end{aligned}$$

Analog für viele Massenpunkte:

$$\begin{aligned} L^i &= \sum_a m_a (\delta^{ij} r_a^2 - (\vec{r}_a)^i (\vec{r}_a)^j) \omega^j = I^{ij} \omega^j \\ \text{bzw. } &\boxed{L = I \omega} \\ &\uparrow \\ &\text{Matrix Schreibweise} \end{aligned}$$

4 Kreisel

4.1 Eulergleichungen

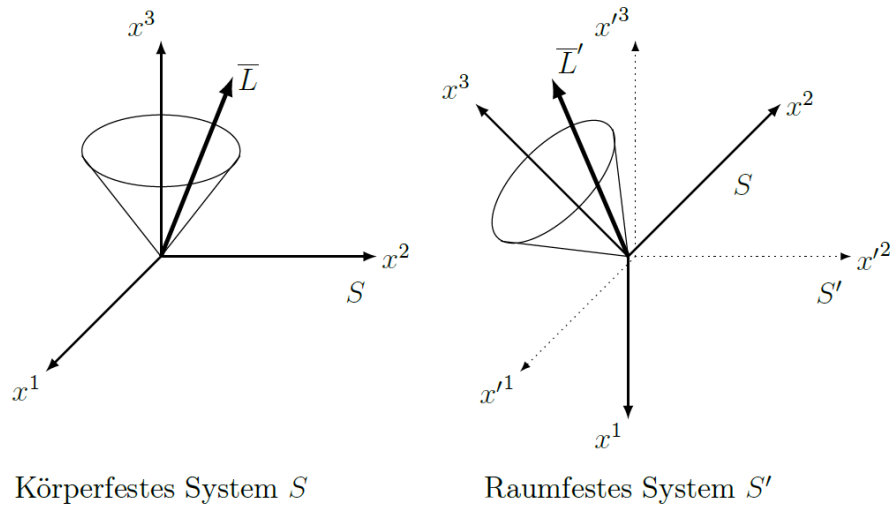


Abbildung 6: * Übergang durch Zeitabhängige Drehmatrix $R(t) \in SO(3)$,
z.B. $L' = R \cdot L$, $v' = R \cdot v$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\dot{L}' = M'}_{\text{gilt im Inertialsystem } S'} &\Rightarrow \frac{d}{dt} (R \cdot L) = R \cdot M \\
 &\Rightarrow \dot{R} \cdot L + R \cdot \dot{L} = R \cdot M & \dot{R} \cdot r = R \cdot (\omega \times r) \\
 &\Rightarrow R \cdot (\omega \times L) + R \cdot \dot{L} = R \cdot M & \omega \text{ aus Sicht des rotierenden Systems } S \\
 &\Rightarrow \boxed{\dot{L} = M + L \times \omega}
 \end{aligned}$$

Es gilt: $L = I \omega$. In S ist I eine feste Matrix (die wir auch noch diagonal wählen können $\leftrightarrow$ Hauptachsensystem)

$$\Rightarrow I \dot{\omega} = M + (I \omega) \times \omega \quad ; \quad I = \text{diag} (I_1, I_2, I_3)$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}^1 &= M^1 + \omega^2 \omega^3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}^2 &= M^2 + \omega^3 \omega^1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}^3 &= M^3 + \omega^1 \omega^2 (I_1 - I_2) \end{aligned} \right\|$$

Euler-Gleichungen

4.2 Freier Kreisel - qualitativ

Energieerhaltung im Hauptachsensystem:

$$E = T = \frac{1}{2} \omega^T \cdot \mathbf{I} \cdot \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{I}_i (\omega^i)^2$$

Es gilt: $L^i = \mathbf{I}_i \omega^i$ (ohne Summe)

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{(L^i)^2}{\mathbf{I}_i} \Rightarrow 1 = \frac{(L^1)^2}{2E\mathbf{I}_1} + \frac{(L^2)^2}{2E\mathbf{I}_2} + \frac{(L^3)^2}{2E\mathbf{I}_3} \quad (*)$$

Vergleiche mit allg. Formel für ein Ellipsoid: $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

$\Rightarrow (*)$ definiert ein Ellipsoid im L-Raum $\cong \mathbb{R}^3$ auf welches $\vec{L}$ bei seiner Bewegung eingeschränkt ist! Es heißt: Binet-Ellipsoid (Halbachsen: $\sqrt{2EI_i}$)

Nutze Drehimpulserhaltung: $L' = \text{const.}$; $L' = R \cdot L$; $L = R^{-1} \cdot L' \neq \text{const.}$

Aber: $|\vec{L}| = \text{const.}$ (weil $R^{-1} \in SO(3)$)

$\Rightarrow L$ bewegt sich im körperfesten System auf Schnittkurven von Binet-Ellipsoid und einer Kugel mit Radius $|\vec{L}| = |\vec{L}'|$.

Sei O.B.d.A. $\mathbf{I}_1 > \mathbf{I}_2 > \mathbf{I}_3$

Fallunterscheidung

1. $|\vec{L}| < \sqrt{2EI_3}$

Dieser Fall ist unmöglich, da die Kugel und das Ellipsoid keine gemeinsamen Punkte haben.

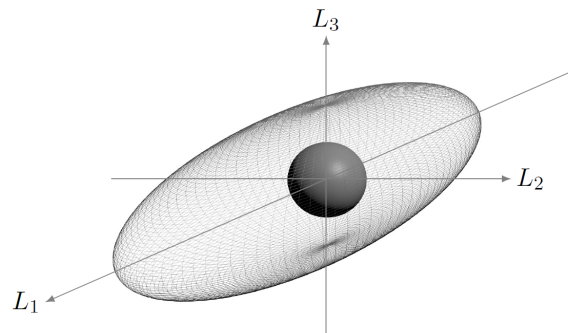


Abbildung 7: Fall 1

2. $|\vec{L}| = \sqrt{2EI_3}$

Hier gibt es 2 Berührungspunkte mit $\vec{L} = \pm(0, 0, \sqrt{2EI_3})^T$. Physikalisch bedeutet das, dass $\omega \parallel \vec{e}_3$ und dieses fest ist.

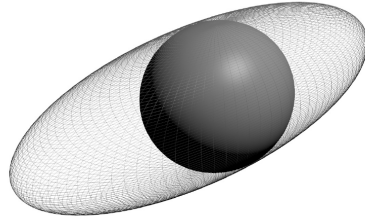


Abbildung 8: Fall 2

3. $\sqrt{2EI_3} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_2}$

In diesem Fall gibt es zwei geschlossene Schnittkurven, auf denen sich $\vec{L}$ im körperfesten System bewegt. Im raumfesten System entspricht das der Präzession des Kreisel (siehe später).

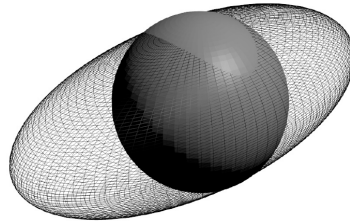


Abbildung 9: Fall 3

4. $|\vec{L}| = \sqrt{2EI_2}$

Es ergeben sich zwei sich kreuzende Kurven. Hierbei sitzt $\vec{L}$ entweder an einem Kreuzungspunkt (instabil), oder bewegt sich entlang der Kurven.

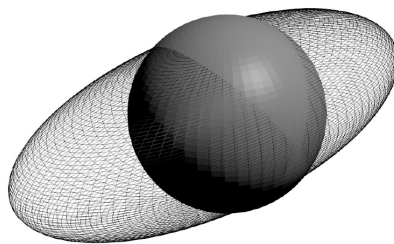


Abbildung 10: Fall 4

5. $\sqrt{2EI_2} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_1}$

Auch hier hat man es (ähnlich wie bei Fall 3) mit zwei geschlossenen Kurven zu tun.

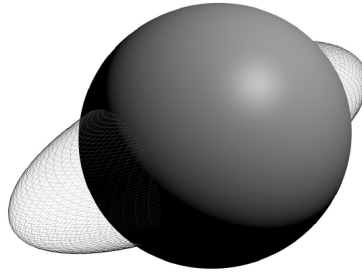


Abbildung 11: Fall 5

6. $|\vec{L}| = \sqrt{2EI_1}$

Auch hier ergeben sich zwei Berührungspunkte, jedoch diesmal von innen. Es liegt eine stabile Rotation vor.

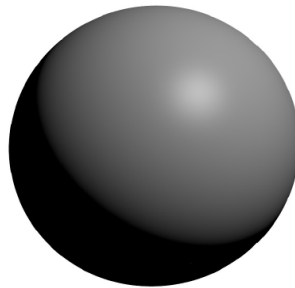


Abbildung 12: Fall 6

7. $|\vec{L}| > \sqrt{2EI_1}$

Dieser Fall ist wie unser erstes Beispiel physikalisch nicht möglich.

4.3 Freier Kreisel - analytisch

Nun wollen wir die obigen Illustrationen nochmals betrachten, jedoch diesmal auch quantitativ. Wir erinnern uns an die Euler Gleichungen und spezialisieren uns auf den Fall $I_1 = I_2 < I_3$ und definieren $I_0 \equiv I_{1,2}$. Dies setzen wir in die Euler-Gleichungen ein

$$I_0 \dot{\omega}_1 = (I_0 - I_3) \omega_2 \omega_3$$

$$I_0 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_0) \omega_3 \omega_1$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

also ist ω_3 konstant. Wir parametrisieren diese Konstante durch

$$\alpha \equiv -\omega_3 \cdot \left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) = \omega_3 \cdot \left(\frac{I_3}{I_0} - 1\right)$$

und finden somit

$$\dot{\omega}_1 = -\alpha \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = \alpha \omega_1.$$

Eliminieren wir ω_2 durch Ableiten, erhalten wir die Differentialgleichung $\ddot{\omega}_1 = -\alpha^2 \omega_1$, wovon die allgemeine Lösung $\omega_1 = A \cdot \cos(\alpha t + \varphi)$ ist. Wir können O.B.d.A $\varphi = 0$ wählen und erhalten die Gleichungen für **freie Präzession**

$$\begin{aligned}\omega_1 &= A \cdot \cos(\alpha t) \\ \omega_2 &= A \cdot \sin(\alpha t) \\ \omega_3 &= \text{const.}\end{aligned}$$

Der Präzessionsbegriff bezeichnet also die Richtungsänderung, die die Rotationsachse eines rotierenden Körpers (Kreisel) ausführt, wenn eine äußere Kraft ein Drehmoment senkrecht zu dieser Achse ausübt.

Im konkreten Fall der Erde hat man

$$-\left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) \sim 0,003 = \varepsilon, \quad \alpha = \omega_{\text{Erde}} \cdot \varepsilon$$

und somit

$$T_{\text{Präz.}} = \frac{T_{\text{Erde}}}{\varepsilon} \simeq 300 \text{ Tage.}$$

Dies entspricht jedoch nicht unserer Realität: Man erkennt den sogenannten Chandler-Wobble statt einer sauberen Präzession. Gründe dafür sind beispielsweise die Jahreszeiten oder die Deformierbarkeit der Erde.

4.4 Schwerer Kreisel - vereinfacht

Sei S' eine Symmetrieachse durch den Schwerpunkt unseres Kreisels. Dieser ist im Ursprung des Koordinatensystems fixiert. Wir arbeiten im raumfesten (gestrichenen) System und machen die vereinfachte Annahme, dass $\vec{L}' \parallel \vec{S}'$.

Wenn nun eine Kraft, typischerweise die Schwerkraft, am Schwerpunkt angreift, folgt wegen $\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}' \sim \vec{S}' \times \vec{F}'$ im Rahmen unserer Näherung, dass $\vec{L}' \perp \vec{M}'$.

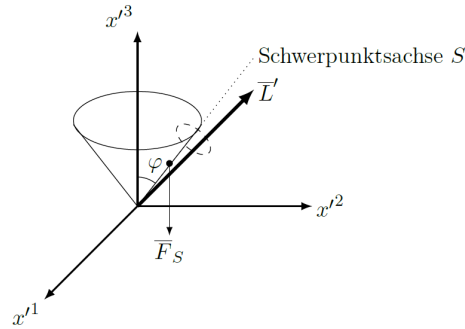


Abbildung 13: Der schwere Kreisel

Außerdem folgt aus

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}')^2 = 2\vec{L}' \cdot \dot{\vec{L}} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M} \longrightarrow |\vec{L}'| = \text{const.}$$

Des Weiteren liegt wegen $\vec{F}' \parallel \hat{e}_3$ das Drehmoment $\vec{M}'$ immer in der x_1 - x_2 -Ebene. Daraus folgt, dass sich die Spitze von $\vec{L}'$ stets auf einer Ebene bewegt, die zur x_1 - x_2 -Ebene parallel ist. Dabei gilt (Wir befinden uns immer noch im L^3)

$$\text{Kreistradius} = |\vec{L}'| \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad \text{Geschwindigkeit} = |\dot{\vec{M}}'|.$$

Für die Periodendauer gilt mit l als Abstand zwischen dem festen Punkt und Schwerpunkt

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi |\vec{L}'| \cdot \sin \varphi}{|\vec{M}'|} = \frac{2\pi |\vec{L}'|}{mgl}.$$

Vorlesung 9, 11.05.21

4.5 Eulersche Winkel

Um eine exakte Analyse des schweren Kreisels durchzuführen, müssen wir zunächst lernen, die relative Lage zweier Koordinatensysteme zu parametrisieren.

Diese Parametrisierung geschieht durch drei aufeinanderfolgende Drehungen. Wichtig ist hierbei, dass sich kleine Drehungen additiv verhalten - wir können also immer das entsprechende $\delta\varphi$ addieren. Deshalb addieren sich auch die Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega}' = \dot{\varphi} \hat{e}_3' + \dot{\psi} \hat{e}_3' + \dot{\theta} \hat{e}_N'$$

mit $\vec{\omega}'$ als abstraktem Vektor.

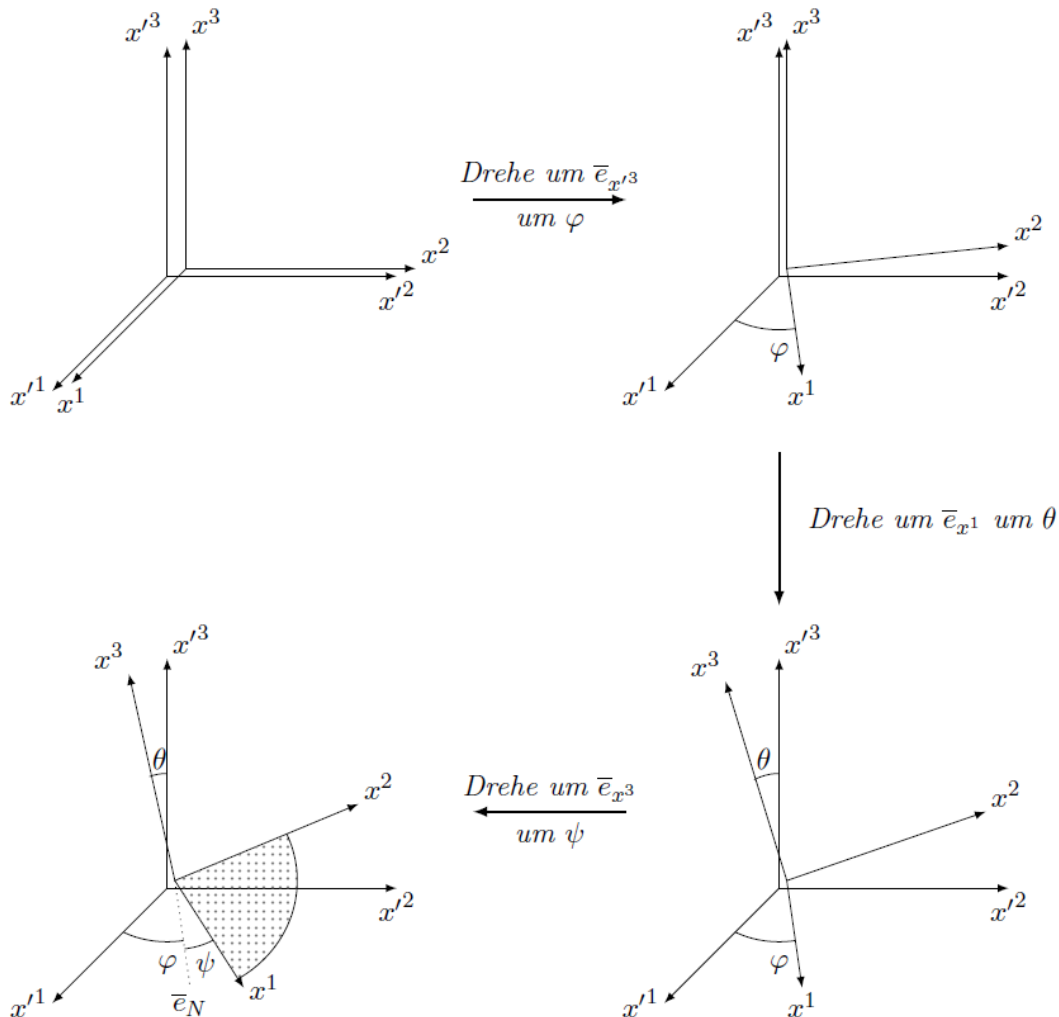


Abbildung 14: Konstruktion der Eulerschen Winkel

4.6 Schwerer Kreisel - exakt

Wie gehabt sei nun das ungestrichene System S fest mit unserem symmetrischen Kreisel verbunden ($I_1 = I_2 \equiv I_0$). Für die Lagrange-Funktion gilt also

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [I_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2] - mgl \cdot \cos \theta.$$

Wegen der Rotationssymmetrie des Schwerfelds sind φ und ψ zyklisch (kommen nicht in $\mathcal{L}$ vor) und wir können eine für uns notwendige Umschreibung durchführen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow \varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}.$$

O.B.d.A. können wir $\varphi = \psi = 0$ setzen. Daraus erhalten wir $\hat{e}_N = \hat{e}_1$ und $\hat{e}_3' = \hat{e}_3 \cdot \cos \theta + \hat{e}_2 \cdot \sin \theta$, also gilt

$$\vec{\omega}' = \varphi(\hat{e}_3 \cdot \cos \theta + \hat{e}_2 \cdot \sin \theta) + \dot{\psi}\hat{e}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_1.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

und unsere Lagrange-Funktion ist somit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [I_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2] - mgl \cdot \cos \theta.$$

Wir haben also T und V in unseren gewünschten Koordinaten und können mit der Energieerhaltung arbeiten.

Nun wollen wir noch $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ aus der Gleichung eliminieren.

Die folgende Eliminierung unserer Variablen kann übersprungen werden, ist aber hilfreich für ein umfangreiches Verständnis des Problems.

Wir setzen voraus, dass die partiellen Ableitungen von $\mathcal{L}$ jeweils Konstanten L' und L entsprechen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= L = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const.} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= L' = I_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\varphi} \cos^2 \theta + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{const.} \\ &= I_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \underbrace{I_3(\dot{\varphi} \cos^2 \theta + \dot{\psi} \cos \theta)}_{\equiv L} \\ \Rightarrow L' &= I_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + L \cos \theta \\ \Leftrightarrow \dot{\varphi} &= \frac{L' - L \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \\ \rightarrow L &= I_3 \dot{\psi} + I_3 \cos \theta \frac{L' - L \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \\ \Leftrightarrow L - I_3 \cos \theta \frac{L' - L \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} &= I_3 \dot{\psi} \\ \Leftrightarrow \dot{\psi} &= \frac{L}{I_3} - \frac{L' \cos \theta - L \cos^2 \theta}{I_0 \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \left[I_0 \left(\dot{\theta}^2 + \left(\frac{L' - L \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + I_3 \left(\frac{L}{I_3} - \frac{L' \cos \theta - L \cos^2 \theta}{I_0 \sin^2 \theta} + \frac{L' \cos \theta - L \cos^2 \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \right)^2 \right] + mgl \cdot \cos \theta \\
&= \frac{1}{2} \left[I_0 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{(L' - L \cos \theta)^2}{I_0^2 \sin^2 \theta} \right) + I_3 \left(\frac{L^2}{I_3^2} \right) \right] + mgl \cdot \cos \theta \\
&= \frac{1}{2} \left[I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{(L' - L \cos \theta)^2}{I_0 \sin^2 \theta} + \frac{L^2}{I_3} \right] + mgl \cdot \cos \theta
\end{aligned}$$

→ Umschreiben und Term für Substitution anpassen; ($L \equiv L^3$; $L' \equiv L'^3$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[I_0 \frac{\dot{\theta}^2 (-\sin \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{(L'^3 - L^3 \cos \theta)^2}{I_0 \sin^2 \theta} + \frac{(L^3)^2}{I_3} \right] + mgl \cdot \cos \theta \\
&= \frac{1}{2} I_0 \frac{(-\dot{\theta} \sin \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} + \frac{(L'^3 - L^3 \cos \theta)^2}{2I_0(1 - \cos^2 \theta)} + \frac{(L^3)^2}{2I_3} + mgl \cdot \cos \theta
\end{aligned}$$

Substitution: $u = \cos \theta$; $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + mgl \cdot u + \frac{(L^3)^2}{2I_3} + \frac{(L'^3 - L^3 u)^2}{2I_0(1 - u^2)} \\
&\rightarrow V_{\text{eff}}(u) \equiv mgl \cdot u + \frac{(L^3)^2}{2I_3} + \frac{(L'^3 - L^3 u)^2}{2I_0(1 - u^2)}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir das äquivalente 1-dimensionale Problem in u

$$E = \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + V_{\text{eff}}(u)$$

→ Auflösen nach $-\dot{u}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{2(1 - u^2)}{I_0} E &= \dot{u}^2 + \frac{2(1 - u^2)}{I_0} mgl \cdot u + \frac{2(L^3)^2(1 - u^2)}{2I_0 I_3} + \frac{2(1 - u^2)(L'^3 - L^3 u)^2}{2I_0^2(1 - u^2)} \\
\Leftrightarrow -\dot{u}^2 &= \frac{2}{I_0} \left[\underbrace{(1 - u^2) \left(mgl \cdot u + \frac{(L^3)^2}{2I_3} - E \right) + \frac{(L'^3 - L^3 u)^2}{2I_0}}_{\text{Polynom 3. Grades in u: } \sim P(u)} \right]
\end{aligned}$$

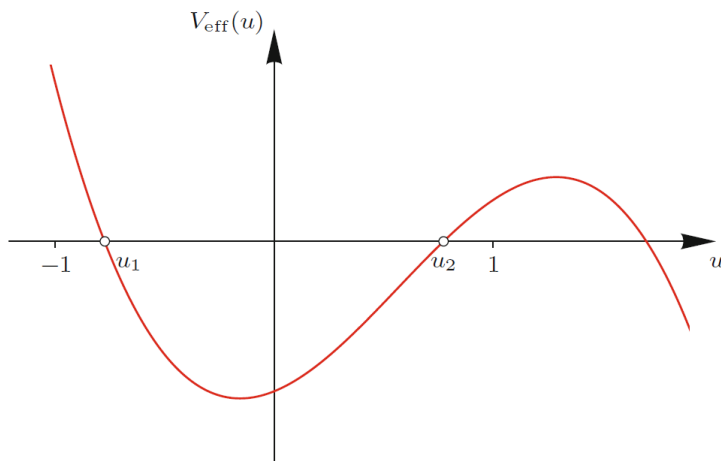


Abbildung 15: Polynom 3. Grades, welches $-\dot{u}^2$ beschreibt

Beziehung zu $\dot{\varphi}$:

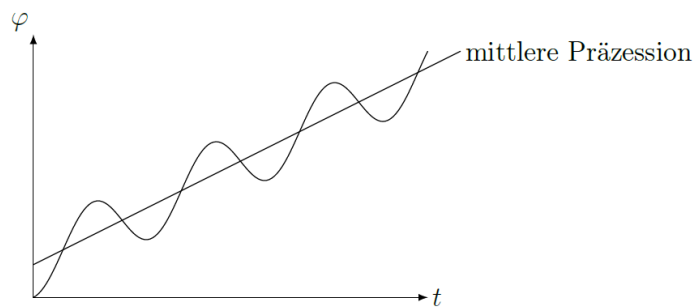


Abbildung 16: $\varphi(t)$ -Diagramm für den schweren Kreisel

betrachte Herleitung:

$$\dot{\varphi} = \frac{(L'^3 - L^3 \cos \theta)}{I_0 \sin^2 \theta} \quad \varphi \text{ schreitet ungleichmäßig voran}$$

verschiedene mögliche Kreisbahnen:

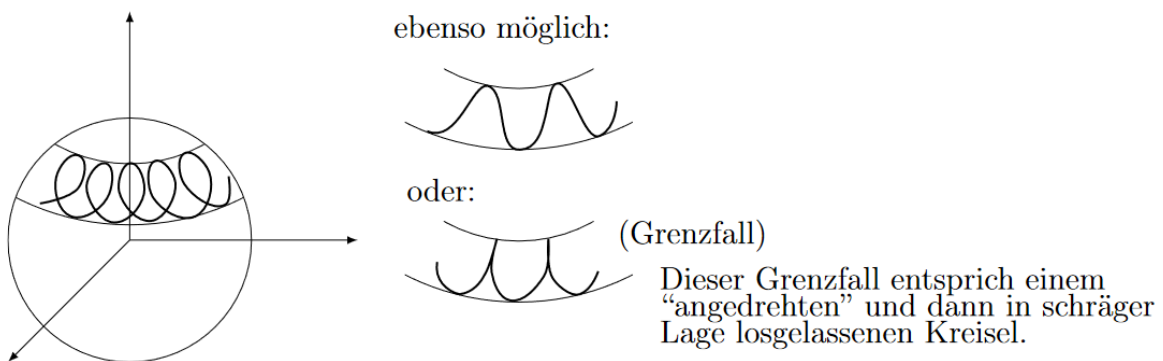


Abbildung 17: Kreiselbewegung, dargestellt auf Sphäre um den festen Punkt (Fußpunkt)

5 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen der 1. und 2. Art

5.1 Arten von Zwangsbedingungen

- Beispiele:

- 1 Gasmoleküle in Kasten
- 2a Perle auf unbewegtem Draht
- 2b Perle auf bewegtem Draht
- 3 Senkrecht stehendes, rollendes Rad
- 4 Durch Stangen verbundene Punktmassen

Zwänge heißen holonom („ganz“, „integer“) falls sie als nicht-differentielle Gleichungen formulierbar sind:

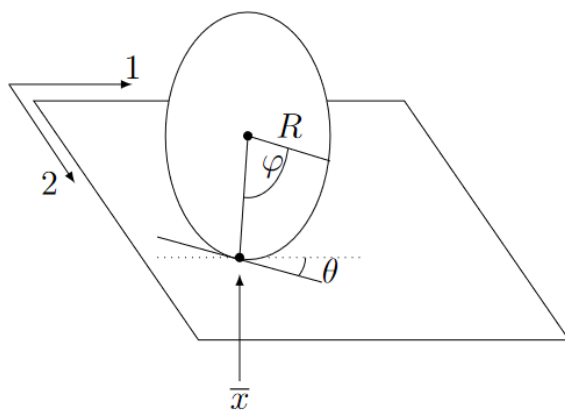
$$\Phi_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \dots d$$

$$\text{holonom} \quad \begin{cases} \text{mit } t: & \text{rheonom (2b)} \\ \text{ohne } t: & \text{skleronom (2a), (4)} \end{cases}$$

Einfach gesagt: alles, was sich auf einer Geraden, in einer Ebene oder auf einer Sphäre bewegt.

Sonst: „nicht-holonom“ (Restriktion, die sich nicht auf eine Fläche, Sphäre, etc. einschränkt)

Wichtige Unterklasse: Zwänge in differentieller, nicht-integrierbarer Form (Beispiel 3)



$\bar{x}$: Auflagepunkt
 φ : Rollwinkel
 θ : Orientierungswinkel der Radebene

Abbildung 18: Auf einer Ebene rollendes Rad

Zwänge:

$$dx^1 = R d\varphi \cos \theta$$

$$dx^2 = R d\varphi \sin \theta$$

$$\text{mit } \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Frage: Kann man eine Funktion $\Phi(x^1, x^2, \varphi, \theta)$ finden, so dass $\Phi(x^1, x^2, \varphi, \theta) = 0$ gilt und wenigstens einen der Zwänge ersetzt.

Beliebige Rollwinkel φ können durch ein ‘Herumrollen’ auf einem kleineren oder größeren Kreis zu gleichen (x^1, x^2, θ) zurückgeführt werden.

$$\Phi(x^1, x^2, \varphi, \theta) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = d\Phi = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta}_{\text{Könnte man so eine der obigen differentiellen Bedingungen finden?}}$$

Nein, denn dann könnten wir nach φ auflösen. Aber eine eindeutige Zuordnung $x^1, x^2, \theta \rightarrow \varphi = \varphi(x^1, x^2, \theta)$ kann es nicht geben!

Ein Zwang (Zwangsbedingung) ist (in vielen Fällen) eine Einschränkung der unabhängigen Änderbarkeit der Parameter (verallg. Koordinaten)

Vorlesung 10, 18.05.21

Gimbal-kardanische Aufhängung

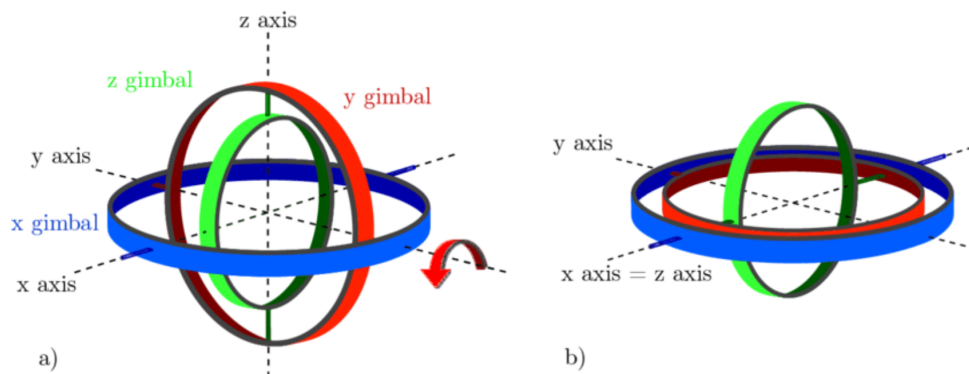


Abbildung 19: Gimbal mit 3 Euler-Winkeln. b) befindet sich im Gimbal lock

Gimbal lock: 1 Freiheitsgrad geht verloren. Nur 2 Freiheitsgrade bei $\theta = 0$

→ bei Euler-Winkel Beschreibung von $SO(3)$: Nur schlechter Punkt der Parametrisierung vgl. verwandte Problematik bei Federpendel-Aufgabe (Blatt 5)

5.1.1 Zwänge

holonom

$$\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0$$

bzw. $\Phi(q_1, \dots, q_m, t) = 0$

differentiell; nicht-holonom

$$\sum_i f_i(q, t) \cdot dq^i + f_t(q, t) \cdot dt = 0$$

z.B. rollendes Rad auf Ebene (Abbildung 18)

5.2 Prinzip der virtuellen Arbeit und d'Alembertsches Prinzip

Fakt: In vielen Fällen verrichten Zwangskräfte $\vec{F}^c$ (c - constraint) keine Arbeit. Wir wollen nun die im Allgemeinen nicht explizit bekannten Zwangskräfte aus unseren Bewegungsgleichungen eliminieren. Genau das wollen wir im Folgenden diskutieren.

Beispiel: Masselose starre Stange

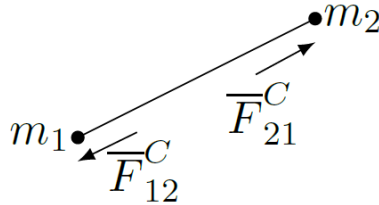


Abbildung 20: Masselose starre Stange

Aus Diskussion der Energieerhaltung in TP1:

$$\delta A = \vec{F}_{12}^c d\vec{x}_1 + \vec{F}_{21}^c d\vec{x}_2 = 0$$

Beispiel: Perle auf Draht

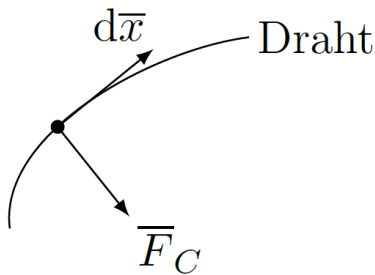


Abbildung 21: Perle auf Draht

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F}^c d\vec{x} = 0$$

Aber: (Perle auf bewegtem Draht)

$$\Rightarrow \delta A \neq 0$$

Ziel: Wollen die Grundidee "Zwangskräfte verrichten keine Arbeit" trotzdem nicht aufgeben.

Idee: Setze künstlich $dt = 0$

Prinzip der virtuellen Arbeit

Dazu Definition Eine virtuelle Verrückung ist eine gedachte, kleine Verrückung eines Systems, welche mit den Zwängen konsistent ist. → keine echte Bewegung

Unsere modifizierte Behauptung:

Bei virtuellen Verrückungen gilt:

$$\sum_{a=1}^N \vec{F}_a^c \cdot \delta \vec{x}_a = 0$$

$\delta \equiv$ Symbol für virtuelle Verrückung

→ Definition von “glatt geführten Systemen”

(Unser Bsp. mit Perle auf bewegtem Draht ist jetzt okay)

Weitere Umformulierung: Für jede Punktmasse:

$$\vec{F}_a^{tot} = \vec{F}_a + \vec{F}_a^c \Rightarrow \sum_a \left(\vec{F}_a - \vec{F}_a^{tot} \right) \cdot \delta \vec{x}_a = 0$$

$$\Rightarrow \sum_a \left(\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a \right) \delta \vec{x}_a = 0$$

↑
d'Alembertsches Prinzip

Gleichgewicht am Beispiel der Wippe

Im Gleichgewicht gilt: $\sum_a \vec{F}_a \delta \vec{x}_a = 0$

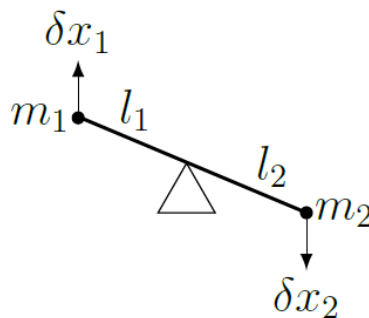


Abbildung 22: Herleitung des Hebelgesetzes am Beispiel einer Wippe

Nur vertikale relevant:

$$\text{d'Alembert: } F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Geometrie: } \delta x_2 = -\frac{l_2}{l_1} \delta x_1$$

$$F_1 \delta x_1 + F_2 \left(-\frac{l_2}{l_1} \right) \delta x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad \leftarrow \text{ Hebelgesetz}$$

5.3 d'Alembert mit verallgemeinerten Koordinaten und Kräften

- N Massenpunkte
- d holonome Zwänge: $\Phi_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0$, $\alpha = 1 \dots d$
- Arbeite mit verallgemeinerten Koordinaten q_m , die keinen Zwängen unterliegen:

$$\vec{x}_a = \vec{x}_a(q_1, \dots, q_{3N-d}, t)$$

$$\text{d'Alembert: } \sum_a (\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a) \delta \vec{x}_a = 0$$

$$\rightarrow \text{müssen Zwänge respektieren: } \boxed{\delta \vec{x}_a = \sum_m \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m} \text{ mit } \delta q_m \text{ beliebig}$$

Ziel: d'Alembert in q_m umschreiben

Term 1:

$$\begin{aligned} \sum_a \vec{F}_a \delta \vec{x}_a &= \sum_{m,a} \vec{F}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \\ &= \sum_m Q_m \delta q_m \quad \text{mit } \boxed{Q_m \equiv \sum_a \vec{F}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}} \rightarrow \text{verallg. Kraft} \end{aligned}$$

Term 2:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}}_a \delta \vec{x}_a &= \sum_m \ddot{\vec{x}}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \\ &= \sum_m \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \right) - \dot{\vec{x}}_a \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \right) \right) \delta q_m \end{aligned}$$

Nebenrechnung zu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \right) \leftarrow$ Zur Vereinfachung ohne Indizes: $x = x(q, t)$

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad x &= x(q, t) \quad ; \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \equiv \dot{x}(q, \dot{q}, t) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (**)$$

$$\boxed{3} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (***)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}$$

Man erhält also:

$$\begin{aligned}\sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \delta \vec{x}_a &= \sum_{a,m} m_a \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_a \frac{\partial \dot{\vec{x}}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{\vec{x}}_a \frac{\partial \dot{\vec{x}}_a}{\partial q_m} \right) \delta q_m \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{a,m} m_a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \right) \right) \delta q_m\end{aligned}$$

(1) Diesen Schritt gehen wir “Rückwärts” durch:

→ zur Vereinfachung: Indizes und Vektoren vernachlässigen

$$\begin{aligned}(1) : & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 \dot{q} + 0 + 2 \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \dot{x} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right) - \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \delta \vec{x}_a \stackrel{(1)}{=} \sum_{m,a} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \right) \right) \delta q_m$$

Mit $T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{x}}_a^2$ und “Term 1”, “Term 2” folgt:

$$\sum_m \left(Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right) \delta q_m = 0$$

Dies ist das **d’Alembertsche Prinzip in verallgemeinerten Koordinaten**. Da δq_m beliebig ist, muss der Ausdruck in den Klammern null werden. Wir erhalten also $(3N - d)$ Differentialgleichungen für die $(3N - d)$ Variablen q_m . Damit ist das Problem prinzipiell gelöst.

$$\vec{F}_a^C = \sum_a (\vec{F}_a - \underbrace{m_a \ddot{\vec{x}}_a}_{\vec{F}_a^{\text{tot}}}) \cdot \delta \vec{x}_a$$

5.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Die verallgemeinerten Koordinaten seien im Folgenden zusätzlich nichtholonomen differentiellen Zwängen unterworfen

$$\sum_m f_m^\alpha dq_m + f_t^\alpha dt = 0 \quad \alpha = 1, \dots, p$$

$$f^\alpha \equiv \text{Funktionen von } q_1, \dots, q_{3N-d}, t$$

wobei f^α Funktionen von q_m und t sind (d - Anz. d. holonomen Zwänge). Wir wollen nun

$$\delta \vec{q} \equiv \{\delta q_m\}, \quad \vec{f}^\alpha \equiv \{f_m^\alpha\} \quad \text{und} \quad \vec{\pi} \equiv \left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right\}$$

als Vektoren in $\mathbb{R}^{3N-d}$ betrachten (wobei d die Anzahl der Zwangsbedingungen bezeichnet und N die Anzahl der Massenpunkte). In dieser Sprache vereinfachen sich die differentiellen Zwänge für virtuelle Verrückungen (mit $dq \rightarrow \delta q$ und $dt = 0$) zu

$$\vec{f}^\alpha \cdot \delta \vec{q} = 0 \quad \forall \alpha.$$

Wir wollen nun mit $\text{span}\{\vec{f}^\alpha\}$ den linearen UVR in $\mathbb{R}^{3N-d}$ bezeichnen, der von den $\vec{f}^\alpha$ aufgespannt wird. Sein orthogonales Komplement nennen wir $\text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp$. Also ist

$$\delta \vec{q} \in \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp$$

formulieren. Dies definiert die erlaubten virtuellen Verrückungen. Wir können auch schreiben

$$\{\delta \vec{q}\} = \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp.$$

D'Alembert besagt nun

$$\vec{\pi} \cdot \delta \vec{q} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\vec{\pi} \in \{\delta \vec{q}\}_\perp.$$

Damit folgt dann

$$\vec{\pi} \in \left\{ \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp \right\}_\perp = \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}.$$

Da dies nun zu jedem Zeitpunkt gilt, müssen Funktionen $\lambda^\alpha(t)$ existieren, sodass:

$$\left\| \begin{aligned} Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha &= 0 \\ \sum_m f_m^\alpha \dot{q}_m + f_t^\alpha &= 0 \end{aligned} \right\|$$

Wir können also $\vec{\pi}$ als Linearkombination von unseren Zwangsbedingungen f_m^α darstellen.

Dieses System von $(3N-d) + p$ Differentialgleichungen für die $(3N-d) + p$ Funktionen q_m und $\lambda^\alpha(t)$ bezeichnet man als **Lagrange-Gleichungen 1. Art**. Das Problem ist damit prinzipiell gelöst.

5.5 Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte

Aus der Herleitung des d'Alembertschen Prinzips in verallgemeinerten Koordinaten lässt sich folgendes Zwischenergebnis extrahieren:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T = \sum_a m_a \ddot{x}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

Mit

$$m_a \ddot{x}_a = \vec{F}_a^{tot} = \vec{F}_a + \vec{F}_a^C$$

und der Definition für die verallgemeinerten echten Kräfte

$$Q_m \equiv \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

und der verallgemeinerten Zwangskräfte

$$Q_m^C \equiv \sum_a \vec{F}_a^C \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

folgt daraus

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T = Q_m + Q_m^C.$$

Wenn wir dies in die Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0$$

einsetzen, ergibt sich:

$$Q_m^C = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha.$$

Die Lagrange-Multiplikatoren bestimmen demnach die verallgemeinerten Zwangskräfte.

5.6 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Betrachten wir nun ein System mit verallgemeinerten Koordinaten q_m ohne zusätzliche nichtholonome Zwänge. Die äußeren Kräfte seien konservativ

$$\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_a V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N).$$

Für die verallgemeinerten Kräfte gilt

$$Q_m = \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} = - \sum_a \left(\vec{\nabla}_a V \right) \cdot \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} = - \frac{\partial V}{\partial q_m} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) V.$$

Wir haben hier im vorletzten Schritt V als $V(\vec{x}(q))$ aufgefasst und im letzten Schritt benutzt, dass $\partial V / \partial \dot{q}$ verschwindet.

Wir erinnern uns an d'Alembert in verallgemeinerten Koordinaten

$$Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T = 0.$$

Einsetzen der eben gefundenen Formel für Q_m liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) V - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) (V - T) &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) L &= 0, \end{aligned}$$

mit $L \equiv T - V$. Damit haben wir nochmals die Euler-Lagrange Gleichungen (auch als Lagrange-Gleichungen 2. Art) nochmals hergeleitet.

5.7 Lagrange-Multiplikatoren - allgemeine Sicht

Stellen wir uns eine durch die Höhenfunktion $f(x, y)$ beschriebene Gebirgslandschaft vor. Um den Gipfel zu finden, müssen wir sowohl x als auch y extremalisieren.

Nun interessiert uns nicht der höchste Punkt des Gipfels im Allgemeinen, sondern nur auf unserem Weg $g(x, y) = 0$, also einer Projektion der Trajektorie auf die $x - y$ -Ebene. Es gelten also

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad g(x, y) = 0.$$

Wir haben offensichtlich ein Problem, da unsere drei Gleichungen nicht alle auf einmal lösbar sind, da wir nur zwei Variablen haben, von denen die Extremalisierung abhängt.

Hier kommt nun unser Lagrange-Multiplikator ins Spiel und wir stellen als zentrale Behauptung auf: Um $f(x, y)$ entlang $g(x, y) = 0$ zu extremalisieren, müssen wir nun betrachten

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}(f + \lambda g) = 0.$$

Dies ist möglich, da wir drei Gleichungen haben für die drei Variablen (x_0 , y_0 und λ) haben.

Begründung: Mit unserer Lösung $\{x_0, y_0, \lambda_0\}$ liegt eine Funktion vor, nämlich $f(x, y) + \lambda_0 g(x, y)$, deren Extremum gerade auf dem Weg $g(x, y) = 0$ liegt. Da aber g per Definition entlang dieses Weges verschwindet, haben wir auch das Extremum von f alleine gefunden.

Wir wollen jetzt noch klarstellen, dass wir bei unserer vorher diskutierten Herleitung der Lagrange-Gleichungen 1. Art genau diese Idee benutzt haben. Dazu beschränken wir uns auf den Fall einer nichtholonomen Zwangsbedingung $\vec{f}$ mit $f_t = 0$. Wenn wir naiv herangehen, sollen in diesem Fall

$$\vec{\pi} \equiv \left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right\} = 0$$

zusammen mit $\vec{f} \cdot \dot{\vec{q}} = 0$ unser Problem lösen.

Das ist aber nicht möglich, da wir mehr Differentialgleichungen als Variablen q_m haben. Wir sollen aber eigentlich nur das Produkt mit der erlaubten virtuellen Verschiebung $\delta \vec{q}$ zum Verschwinden bringen. Die Lösung liegt auch hier im Lagrange-Multiplikator

$$\vec{\pi} + \lambda \vec{f} = 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad \vec{f} \cdot \dot{\vec{q}} = 0.$$

Dies geht, da wir die zusätzliche Variable λ zur Verfügung haben.

Die spannenden Anwendungen des Multiplikators sind vom Funktional-Typ:

Seien $F[f]$, $G[f]$ Funktionale. Wollen wir F mit der Nebenbedingung $G = 0$ extremalisieren, müssen wir einfach nur folgenden Ausdruck bezüglich f und λ extremalisieren

$$F[f] + \lambda G[f].$$

Wir müssen nicht einmal $G = 0$ fordern, da dies die Extremalisierung in λ garantiert

$$0 = \delta_\lambda(F + \lambda G) = G.$$

Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Lagrange-Funktion L mit der holonomen Zwangsbedingung $f = 0$. Nach dem oben Diskutierten genügt es, das Extremalisierungsproblem

$$\delta \int dt [L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \lambda(t)f(\vec{x})] = 0$$

bezüglich der Funktionen $\vec{x}(t)$ und $\lambda(t)$ zu lösen.

Vorlesung 12, 25.05.21

6 Hamilton Formalismus

- Dynamik aus Differentialgleichungen 1. Ordnung
- Umkehrung des Noether-Theorems
(Erhaltungsgröße $\rightarrow$ Symmetrie)
- Wichtig für eine der zwei Definitionen der Quantenmechanik (“kanonische Quantisierung”)

6.1 Legendre-Transformation

gegebene Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

Wir wollen die in f kodierte Information als Funktion von $u = f'(x)$ darstellen. Dazu stellen wir uns (wie aus der Schule bekannt) eine Funktion f und ihre Tangente an einem Punkt x_0 vor.

Ziel: Wollen zu Funktion von $u \equiv f'(x)$ übergehen

Idee: $x = x(u)$ im allgemeinen möglich

Neue Funktion: $u \mapsto f(x(u))$

Mathematisch “natürlichere” Definition ist:

$$u \mapsto x(u) \cdot u - f(x(u))$$

Definition: Die Legendre Transformierte zu einer Funktion $x \mapsto f(x)$ ist die Funktion $u \mapsto g(u)$ mit $g(u) = xu - f(x)$, wobei $u = f'(x)$

(Soll stets $f''(x) \neq 0$ damit $u = f'(x)$ auflösbar)

Fakten/ Eigenschaften:

Zunächst stellen wir fest, dass $g'(u) = x(u)$ stets gilt.

$$\begin{aligned}\text{Prüfen: } g'(u) &= \frac{d}{du} (x(u) \cdot u - f(x(u))) \\ &= \frac{dx(u)}{du} \cdot u + x(u) - f'(x(u)) \cdot \frac{dx(u)}{du} \\ &\Rightarrow g'(u) = x(u)\end{aligned}$$

Wenn g die Legendre-Transformierte zu f ist, dann sind f' und g' zueinander inverse Funktionen. Dies haben wir bereits gezeigt, weil $f'(g'(u)) = f'(x(u)) = u$ gilt. Wir bemerken auch, dass diese Eigenschaft oft als Definition der Legendre-Transformation benutzt wird.

$$\text{Prüfen: } f'(g'(u)) = f'(x(u)) = u$$

Die Legendre Transformation ist eine Involution, d.h. $\text{Leg}(\text{Leg}(f)) = f$

Wir prüfen dies explizit nach. Seien f , g , h so definiert, dass

$$f \xrightarrow{\text{Leg}} g \xrightarrow{\text{Leg}} h$$

Es gilt also insbesondere

$$h(z) = u \cdot z - g(u) \quad \text{mit } z = g'(u)$$

Mit $g'(u) = x$ folgt damit $z = x$. Weiterhin ergibt sich

$$h(z) = u \cdot x - (x \cdot u - f(x)) = f(x) = f(z)$$

Verallgemeinerung auf viele Variablen:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

Legendre Transformation:

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{u} \mapsto g(\vec{u})$$

mit

$$g(\vec{u}) = \vec{x}(\vec{u}) \cdot \vec{u} - f(\vec{x}(\vec{u}))$$

wobei $\vec{x} = \vec{x}(\vec{u})$ durch

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x})}_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{u})}$$

gegeben ist.

Statt $f'' \neq 0$ jetzt: $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) \neq 0$ notwendig zum auflösen.

Bemerkung: Die sogenannte Hesse Matrix ist wie folgt definiert:

$$H_f(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) \right)^{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n}(x) \end{pmatrix} \quad | \quad i, j = 1, \dots, n$$

Beispiele:

$$(1) \quad f(x) = x^2; \quad f'(x) = 2x = u \Rightarrow x = \frac{1}{2}u$$

$$\Rightarrow g(u) = xu - f(x) = \frac{1}{2}u^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}u^2$$

$$(2) \quad f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x = u \Rightarrow x = \ln u$$

$$\Rightarrow g(u) = xu - f(x) = u \ln u - e^{\ln u} = u(\ln u - 1)$$

6.2 Hamilton Funktion

Die Hamilton Funktion $H(q, p, t)$ eines Systems mit Lagrange Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ ist als Legendre Transformierte zu L in der Variablen $\dot{q}$ definiert.

Also:

$$H(q, p, t) \equiv p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$$

wobei $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ durch

$$p \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}$$

definiert ist.

Man nennt p den zu q kanonisch konjugierten Impuls.

Sehr wichtiges Beispiel:

$$L = \frac{1}{2}f(q) \cdot \dot{q}^2 - V(q)$$

Nach unserer Definition ist

$$p = f(q) \cdot \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{f(q)}$$

und somit

$$H = p \cdot \dot{q} - L = p \cdot \frac{p}{f(q)} - \left(\frac{1}{2}f(q) \cdot \left(\frac{p}{f(q)} \right)^2 - V(q) \right) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{f(q)} + V(q) = T + V$$

Hier muss T als Funktion von q, p (nicht $q, \dot{q}$) aufgefasst werden.

Mit mehreren Variablen und der Lagrange Funktion L

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

definiert man die Hamilton Funktion H analog

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \dot{q}_i - L$$

wobei die $\dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ durch auflösen der n Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

gegeben werden.

Mit

$$L = \frac{1}{2}f_{ij}(q) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

folgt (z.B. mit dem Satz von Euler)

$$L = T - V \quad \text{und} \quad H = T + V$$

wobei H eine Funktion von q_i, p_i ist.

6.3 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und Phasenraum

Aus den Eigenschaften der Legendre Transformation folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

Außerdem erhalten wir mit Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} (p \cdot \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)) \\ &= p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q} \stackrel{ELG}{=} -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

Diese Rechnung lässt sich mit vielen Koordinaten völlig analog durchführen. Wir haben nun also die Hamilton-Gleichungen gefunden

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Wir vergleichen kurz die Sichtweisen der Mechanik nach Lagrange und Hamilton:

Nach Lagrange wird der Zustand eines Systems durch die $\{q_i\}$, also die Lage im Konfigurationsraum und durch die $\{\dot{q}_i\}$, die momentanen Geschwindigkeiten, festgelegt. Die Bewegung wird durch die Euler-Lagrange-Gleichungen, also n Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben.

Nach Hamilton wird der Zustand durch $\{\xi^a\} \equiv \{q_i, p_i\}$, die Lage im Phasenraum, beschrieben. Letzterer ist $2n$ -dimensional, so dass $a = 1, \dots, 2n$. Die Bewegung wird durch die Hamilton-Gleichungen, also $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung, welche man als $\dot{\xi}^a = f^a(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, t)$ hinschreiben kann, definiert.

Um Intuition zu gewinnen, betrachten wir das einfache Hamiltonsche System:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Die Hamilton Gleichungen sind

$$\underbrace{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}}_{\text{Def. von } p} \quad \text{und} \quad \underbrace{\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}}_{\text{Newton!}}$$

Differenziere 1. Gleichung nach t : $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m}$

Nutze 2. Gleichung: $\ddot{q} = \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial V}{\partial q} \right)$ bzw. $m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$

Damit sind wir wieder bei Lagrange.

Eine sehr wichtige Methode ist die der Veranschaulichung von Lösungen im Phasenraum (“Phase Portrait”).

Hierfür benutzen wir die Energieerhaltung in unserem einfachen Beispiel:

$$\frac{p^2}{2m} + V(q) = E = \text{const.}$$

Wir können das Problem damit vollständig lösen. Wir lösen nach p auf:

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} \equiv p(q)$$

$p(q)$ sind die gesuchten Trajektorien im Phasenraum (Für jedes E eine andere)

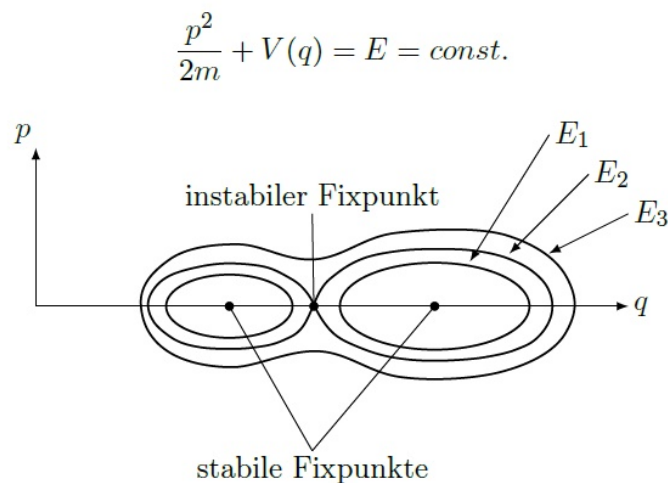
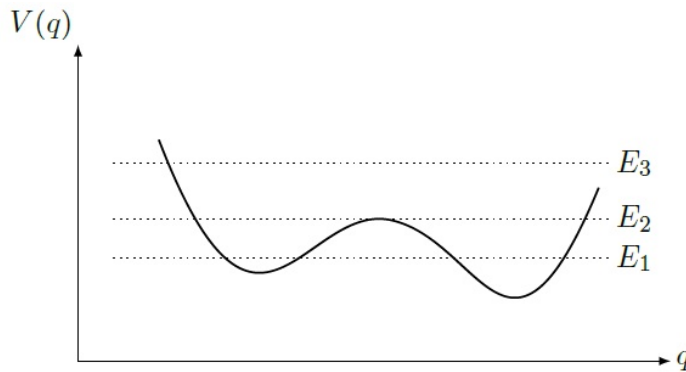


Abbildung 23: Beispielpotential und Darstellung der Trajektorien im Phasenraum

Allgemeiner sehen wir, dass $\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ und } \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)$ an jedem Punkt des Phasenraumes einen $2n$ -dimensionalen Vektor definieren (bei n -dim. Problem). Dieser legt gemäß der Hamiltonschen Gleichungen die Richtung und Geschwindigkeit des Systems im Phasenraum fest. Damit ist die Evolution für alle Zeiten bestimmt.

7 Poisson-Klammer

7.1 Definition und erste Anwendungen

- Phasenraum eines Hamiltonschen Systems sei parametrisiert durch $\{q_i\}, \{p_i\}; i = 1 \dots n$
- $F(q, p, t), G(q, p, t)$ - zwei beliebige "Observable" $\equiv$ Funktionen auf dem Phasenraum

Definition: Poissonklammer von F und G :

$$\underbrace{\{F, G\}}_{\text{wieder eine Observable}} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\{F, H\}}_{\text{Bestimmt Zeitentwicklung von } F} \end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung einer Observablen wird also durch ihre Poissonklammer mit H bestimmt.

Insbesondere sehen wir, dass H erhalten ist, wenn es nicht explizit von t abhängt.

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \{H, H\} = 0.$$

Allgemeiner gilt: Falls F nicht explizit von t abhängt, dann gilt

$$F \text{ erhalten} \quad \Leftrightarrow \quad \{F, H\} = 0$$

Natürlich sind q_i, p_i auch (besonders einfache) Observable.

Demnach gilt:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Das sind wieder die Hamilton-Gleichungen.

Für die zueinander kanonisch konjugierten Variablensätze $\{q_i\}$ und $\{p_i\}$ gilt

$$\{q_i, q_j\} = 0; \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Wir rechnen Letzteres nach:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (\delta_{ik} \delta_{jk} - 0) = \delta_{ij}.$$

7.2 Die Poissonklammer als Lie-Algebra-Operation

Wir definieren einen Vektorraum $\mathbb{V}$ und $[\cdot, \cdot]$ eine binäre Operation, also eine Abbildung

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}; \quad (v, w) \mapsto [v, w].$$

Man nennt das Paar $\mathbb{V}, [\cdot, \cdot]$ eine **Lie-Algebra**, falls

1. $[v, w] = -[w, v]$ (Antisymmetrie)
2. $[\alpha v + \beta w, u] = \alpha[v, w] + \beta[w, u]$ (Linearität)
3. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (Jacobi-Identität).

Beispielsweise bilden kleine Drehungen eine Lie-Algebra. Dies ist ein spezieller Fall des folgenden allgemeineren Beispiels: Der lineare Raum der $n \times n$ -Matrizen wird durch die Operation

$$[\cdot, \cdot] : A, B \mapsto [A, B] \equiv AB - BA$$

zur Lie-Algebra. AB ist hier das Matrixprodukt, also $(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$, und $[A, B]$ heißt der **Kommutator** von A und B .

Für uns entscheidend ist der folgende Fakt: Die Poissonklammer macht den Raum der Observablen (Raum der Funktionen $\{p_i\}$ und $\{q_i\}$) zur Lie-Algebra.

7.3 Poissonklammer und Vektorfelder

H definiert auf dem Phasenraum eine Bewegung und damit ein Vektorfeld. Konkret sind die beiden Komponenten des Vektors an einem beliebigen Punkt gegeben durch die Hamilton-Gleichungen.

Betrachten wir den harmonischen Phasenraum des harmonischen Oszillators, sieht das Bild wie folgt aus.

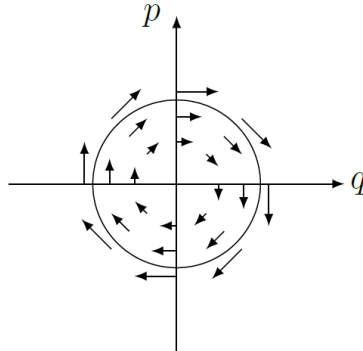


Abbildung 24: Vektorfeld des harmonischen Oszillators im Phasenraum

Man kann diese Bewegung so auffassen, dass sich jede Funktion $F = F(q, p)$ (Observable) mit der Zeit ändert. Wir schließen explizite Zeitabhängigkeit aus und haben (mit $\xi^i = \{p, q\}$)

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^i}{dt} = \frac{\partial \xi^i}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi^i} \equiv V^i(\xi) \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi^i}.$$

Hier sind V^i die Komponenten des Vektorfeldes an jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2$. Wir sehen weiterhin, dass wir mit einer solchen Bewegung und dem entsprechenden Vektorfeld immer auf natürliche Weise einen Differentialoperator 1. Ordnung assoziieren können:

$$\frac{d}{dt}F = \left(V^i(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) F \equiv DF.$$

Das obige gilt allgemein für Bewegungen auf einem mehrdimensionalen Raum und entsprechende Vektorfelder. Konkret im Hamilton-Formalismus haben wir

$$\frac{d}{dt}F = -\{H, F\} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) F \equiv -D_H F.$$

Das negative Vorzeichen ist hier eine bequeme Konvention. Wir haben also gelernt: H induziert eine Bewegung auf dem Phasenraum und damit ein Vektorfeld und damit wiederum einen Differentialoperator D_H .

H ist aber nur eine der vielen Observablen und wir können prinzipiell auch jede andere Observable nehmen und mit ihr ein Vektorfeld, einen Differentialoperator und eine Bewegung assoziieren. H induziert

$$\frac{d}{dt}F = -D_H F = \{F, H\}$$

und $G = G(q, p)$ induziert

$$\frac{d}{dt}F = -D_G F = \{F, G\}.$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass die obige Vorschrift einen **Isomorphismus von Lie-Algebren** induziert:

$$\begin{array}{lll} \text{Observable} & \leftrightarrow & \text{Differentialoperatoren} \\ \{\cdot, \cdot\} & \leftrightarrow & [D_F, D_G] = \underbrace{D_F D_G - D_G D_F}_{\text{Kommutator}}. \end{array}$$

Links steht die Lie-Algebra der Funktionen mit der Poisson-Klammer, rechts die Differentialoperatoren = Vektorfelder = Bewegungen mit dem Kommutator als Lie-Algebra-Operation. Man beachte, dass $D_F D_G - D_G D_F$ nicht null ist.

Um den Umgang mit Differentialoperatoren zu üben, rechnen wir ein unphysikalisches Beispiel mit nur einer Variablen. Für

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2)x \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

gilt

$$D_1 D_2 f = D_1(x \cdot f') = f' + x \cdot f'' \quad \text{und} \quad D_2 D_1 f = D_2 f' = x \cdot f''.$$

Damit ist

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1 = D_1 \neq 0.$$

Erhaltungsgrößen sind solche Observablen, welche unter der durch H induzierten Bewegung invariant sind, das heißt $D_H F = 0$. Anders gesagt: Ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet. Die dazugehörige Symmetrie ist die durch D_F induzierte Bewegung (Umkehrung des Noether-Theorems).

$$\text{Observable } F(q, p), G(q, p) \xleftarrow{*} \text{Diff. Operatoren/ Vektorfelder}$$

$$[D_F, D_G] = D_F D_G - D_G D_F$$

(*) Isomorphismus auf einen Unterraum aller Vektorfelder

Observable induzieren “Bewegung” auf Phasenraum durch $\dot{G} = \{G, F\}$ (oder als Vektorfeld D_F)

F erhalten ($\{F, H\} = 0$) $\Rightarrow F$ (bzw. D_F) induziert Symmetrietransformation des Systems

Beispiel: $2d$ -Phasenraum, eine Translationsinvarianz in $q \equiv x$ führt zur Erhaltung von p . Die Observable $p \equiv F(q, p)$ sollte also Translationen generieren. Klären wir explizit welche Bewegung p bzw. D_p erzeugen. Betrachte entsprechende Transformation einer anderen Observablen G :

$$G : \frac{dG(q, p, u)}{du} = \{G, p\} = -\{p, G\} = -D_p G$$

$$= - \left(\frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \frac{\partial G}{\partial q}$$

Mit Anfangsbedingungen $G(q, p, 0) = G(q, p)$, sieht man sofort, dass $G(q, p, u) = G(q + u, p)$ eine Lösung ist. Wir finden also die erwartete Translation in q als “Bewegung” auf dem Phasenraum, die von p generiert wird.

7.4 Die Drehimpuls-Lie-Algebra in der Hamilton-Mechanik

Wir wissen über kleine Drehungen (aus TP1, 6):

$$R(\vec{\epsilon}) \simeq \mathbb{1} + \epsilon^i T^i \text{ mit } (T^i)^{jk} = \epsilon^{ijk}$$

$\rightarrow$ Die T^i bilden eine Basis der $\text{SO}(3)$ -Lie-Algebra = $\text{Lie}(\text{SO}(3))$

Der Kommutator macht den von T^i aufgespannten Raum zur Lie-Algebra:

$$[T^i, T^j] = T^i T^j - T^j T^i = \epsilon^{ijk} T^k$$

Noether: $T^i \rightarrow$ Erhaltungsgröße L^i ($L^i = \epsilon^{ijk} x^j p^k$) ; $x^j \equiv q^j$

Man prüft mit der Definition der Poisson-Klammer “leicht” nach: $\{L^i, L^j\} = \varepsilon^{ijk} L^k$

$$\begin{aligned}
\{L^i, L^j\} &= \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\eta} \{x^\alpha p^\beta, x^\gamma p^\eta\} \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\eta} \left(x^\alpha \{p^\beta, x^\gamma p^\eta\} + p^\beta \{x^\alpha, x^\gamma p^\eta\} \right) \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\eta} \left(x^\alpha x^\gamma \{p^\beta, p^\eta\} + x^\alpha p^\eta \{p^\beta, x^\gamma\} + p^\beta x^\gamma \{x^\alpha, p^\eta\} + p^\beta p^\eta \{x^\alpha, x^\gamma\} \right) \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\eta} \left(x^\alpha p^\eta \left(0 - \frac{\partial p^\beta}{\partial p^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial q^k} \right) + p^\beta x^\gamma \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^k} \frac{\partial p^\eta}{\partial p^k} - 0 \right) \right) \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\eta} \left(\delta^{\alpha\eta} p^\beta x^\gamma - \delta^{\beta\gamma} x^\alpha p^\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \underbrace{\delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})}_{(k=n) \Rightarrow \equiv 0} \\
&= \delta^{kn} (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{*}{=} \varepsilon^{i\alpha\beta} \varepsilon^{j\gamma\beta} (x^\alpha p^\gamma - x^\gamma p^\alpha) \\
&= (\delta^{ij} \delta^{\alpha\gamma} - \delta^{i\gamma} \delta^{\alpha j}) (x^\alpha p^\gamma - x^\gamma p^\alpha) \\
&= x^\alpha p^\alpha - x^\alpha p^\alpha - x^j p^i - (-x^i p^j) \\
&= x^i p^j - x^j p^i = \varepsilon^{ijk} L^k
\end{aligned}$$

Also gilt: $\{L^i, L^j\} = \varepsilon^{ijk} L^k$

Die L^i erzeugen auf dem Phasenraum die Bewegung, welche die T^i auf dem Konfigurationsraum erzeugen. Explizit heißt dies, z.B. für die Koordinaten $x^i \equiv q^i$: $\{L^i, x^j\} = \varepsilon^{ijk} x^k$

$$\begin{aligned}
\{L^i, x^j\} &= \varepsilon^{i\alpha\beta} \{x^\alpha p^\beta, x^j\} \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} x^\alpha \{p^\beta, x^j\} + \varepsilon^{i\alpha\beta} p^\beta \{x^\alpha, x^j\} & \{q^i, q^j\} &\equiv 0 \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} x^\alpha \left(\frac{\partial p^\beta}{\partial q^k} \frac{\partial x^j}{\partial p^k} - \frac{\partial p^\beta}{\partial p^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \right) \\
&= \varepsilon^{i\alpha\beta} x^\alpha \left(\frac{\partial p^\beta}{\partial q^k} \frac{\partial x^j}{\partial p^k} - \delta^{\beta k} \delta^{jk} \frac{\partial p^\beta}{\partial p^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \right) \\
&= -\varepsilon^{i\alpha\beta} x^\alpha \delta^{\beta j} \frac{\partial p^\beta}{\partial p^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \\
&= -\varepsilon^{i\alpha\beta} x^\alpha \delta^{\beta j} \\
&= -\varepsilon^{i\alpha j} x^\alpha \\
&= -\varepsilon^{ikj} x^k = \varepsilon^{ijk} x^k & i \neq \alpha \neq j \neq i \Rightarrow \alpha \stackrel{!}{=} k
\end{aligned}$$

Also gilt: $\{L^i, x^j\} = \varepsilon^{ijk} x^k$

Vergleiche mit $(T^i \cdot x)^j = (T^i)^{jk} x^k = \varepsilon^{ijk} x^k$
Lie-Algebra $\rightarrow$ Lie-Gruppe

7.5 Satz von Liouville

Sei ξ^a unsere einheitliche Bezeichnung von Phasenraum Koordinaten:

$$\{q_i\}, \{p_j\} \rightarrow \vec{\xi}$$

Trajektorie eines physikalischen Systems im Phasenraum:

$$\vec{\xi}(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)\}$$

Nenne die entsprechenden Phasenraum-Geschwindigkeiten w

$$\vec{w}(t) \equiv \frac{d}{dt} \vec{\xi}(t) = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right\}$$

Falls H zusätzlich eine Zeitunabhängigkeit aufweist, so folgen alle Trajektorien aus dem Vektorfeld:

$$\vec{w}(q, p) = \left\{ \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_n}, -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_n} \right\}$$

Man sagt: $\text{div } \vec{w} = 0 \Leftrightarrow$ Geschwindigkeitsfeld $\vec{w}$ beschreibt inkompressible Strömung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} &= \vec{\nabla}_{\xi} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla}_{q,p} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \frac{\partial w^{n+i}}{\partial p^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

In der Tat: Mit Satz von Gauß folgt:

$$\int_o \vec{w} \, d\vec{f} = \int_{\text{Vol}(o)} \text{div } \vec{w} \, dV = 0 \quad \text{Es strömt genau so viel hinein wie heraus}$$

Daraus folgt (zumindest intuitiv):

Satz von Liouville

Die Größe von Teilvolumina des Phasenraumes ändert sich durch die von der Hamilton-Dynamik definierte Strömung nicht.

Genauere Begründung: (s. Skript)

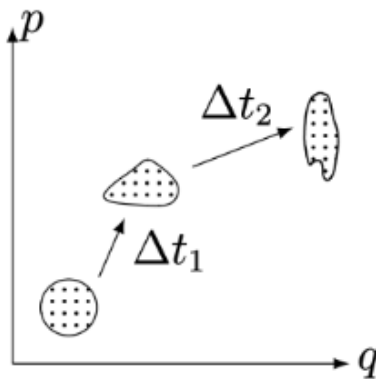


Abbildung 25: Phasenraum mit Teilvolumina unveränderlicher Größe

Betrachte die infinitesimale Bewegung aller Punkte eines Startvolumen V , vgl. Abb. 26. Das dadurch definierte neue Volumen sei V' und für die Differenz gilt

$$\Delta V = V' - V = \int_o d\vec{f} \cdot \Delta\vec{\xi} = \int_o d\vec{f} \cdot \vec{w} \Delta t = 0$$

Terme höherer Ordnung in $\Delta\xi$ bzw. Δt sind hier vernachlässigt. Formel veranschaulicht durch Abbildung 26. (Das Vorzeichen des Produktes $d\vec{f} \cdot \Delta\vec{\xi}$ entscheidet darüber, an welchen Stellen der Oberfläche O das Volumen V wächst bzw. sich zurückzieht.)

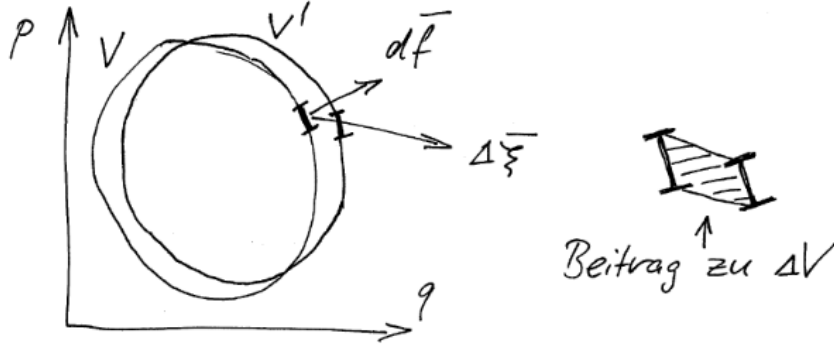


Abbildung 26: Startvolumen V mit infinitesimaler Bewegung aller Punkte

Nach Teilen durch Δt und Grenzwertbildung folgt

$$\frac{d}{dt} V = \int_o d\vec{f} \cdot \vec{w} = \int_V d^{2n}\xi \left(\vec{\nabla} \vec{w} \right) = \int_V d^{2n}\xi \left(\text{div}(\vec{w}) \right) = 0$$

wie bereits behauptet. Im Phasenraum strömen die Teil-Volumina also wie die einer inkompressiblen Flüssigkeit.

8 Hamilton-Mechanik in Differentialformen

8.1 Tangential- und Kotangentialraum (M)

Sei M ein d -dimensionaler Raum, zum Beispiel $d = 2$ eine Fläche/Sphäre. Solch ein Raum hat Realität unabhängig von den Koordinaten, mit denen wir ihn beschreiben. Wir können z.B. die Ebene beschreiben durch

$$x^1, x^2 \quad \text{oder alternativ} \quad r, \varphi.$$

Ebenso sind Vektorfelder auf diesem Raum „real“, unabhängig von den Koordinaten. Wir sehen das zum Beispiel, indem wir uns daran erinnern, dass wir Vektorfelder mit Differentialoperatoren assoziiert haben

$$D : f \mapsto Df.$$

Dies ist eine Abbildung auf dem Raum der Funktionen auf M , also koordinatenunabhängig.

In gewissen Koordinaten x^i sei

$$D = v^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

In andren Koordinaten (r, φ) gilt analog

$$D = v'^i(x') \cdot \frac{\partial}{\partial x'^i}.$$

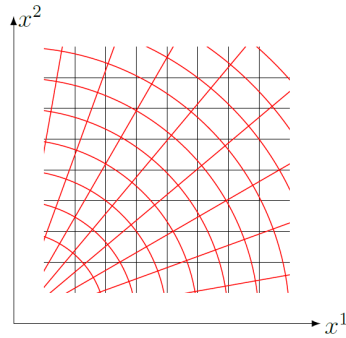


Abbildung 27: Verschiedene Parametrisierungen des $\mathbb{R}^2$

Die Umrechnung erfolgt, indem man mit der Kettenregel schreibt

$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x'^j}$$

und dann durch Koeffizientenvergleich folgert, dass

$$v'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right) v^j.$$

Die so erklärten Vektoren an einem Punkt $q \in M$ bilden den **Tangentialraum** $T_q M$. Der Tangentialraum an einem Punkt q unseres Raumes (als Beispiel zur Anschauung wählen wir eine Sphäre) ist ein Vektorraum, welcher M bei q lokal approximiert.

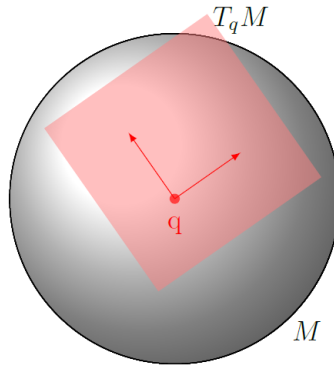


Abbildung 28: Darstellung des Tangentialraums für eine Sphäre

Eine Basis (immer an einem gewissen Punkt des Raums) bilden die Differentialoperatoren

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i},$$

also die partielle Ableitung nach der i -ten Koordinate einer beliebigen Koordinatendarstellung. Anschaulich: Die entsprechenden Basisvektoren sind schlicht Pfeile in die Richtung der jeweiligen Koordinate. Eine andere Koordinatendarstellung liefert nun eine andere Basis für den selben Tangentialraum.

Wir erinnern uns, dass es zu jedem Vektorraum $\mathbb{V}$ einen Dualraum $\mathbb{V}^*$ gibt: den Raum der linearen Funktionale auf $\mathbb{V}$. In unserem Fall heißt dieser **Cotangentialraum** T_q^* . Gegeben durch unsere obige Basis auf T_q definieren wir auf T_q^* die sogenannte duale Basis dx^i durch

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

Aufgrund der Linearität lautet damit die Anwendung eines allgemeinen Covektors $\omega = \omega_i dx^i \in T_q^*$ auf einen allgemeinen Vektor $v = v^j \partial_j \in T_q$

$$\omega(v) = \omega_i dx^i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i v^j \delta_j^i = \omega_i v^i.$$

Vorlesung 15, 08.06.21

8.2 Vektorfelder und 1-Formen (M)

Alles bisher gesagte gilt nun auch für alle Punkte q unseres Raumes M gleichzeitig. So können wir z.B. von Vektoren zu Vektorfeldern übergehen.

Ein Vektorfeld ist demnach eine Abbildung, die jedem Punkt $q \in M$ einen Vektor $v(q) \in T_q M$ zuordnet:

$$q \mapsto v(q) \in T_q M \equiv T_q$$

In Koordinaten ist dies ein Satz von d -Funktionen

$$v^i(x) \quad , \quad x = \{x^1, \dots, x^d\}$$

Ganz analog ordnet eine 1-Form jedem Punkt $q \in M$ einen Kovektor $\omega(q) \in (T_q M)^*$ zu.

$$\omega: M \rightarrow \mathbb{R}; \quad q \mapsto \omega(q) \in T_q^* M \equiv (T_q M)^* \equiv T_q^*$$

Ebenso wie ein Vektorfeld, ist eine 1-Form in Koordinaten schlicht ein Satz von d -Funktionen

$$\omega(x) = \omega_i(x) dx^i$$

Wichtiges Beispiel

Zu jeder Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gehört natürlicherweise eine 1-Form $\omega = df$, welche definiert ist durch

$$df(v) = v^i \partial_i f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv D_v f$$

Mit unserer Definition der dualen Basis rechnet man nach:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i \quad \text{bzw.} \quad (df)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

8.3 Höhere p-Formen (M)

Nun betrachten wir einen neuen Vektorraum - das Tensorprodukt von T_q^* mit sich selbst:

$$T_q^* \otimes T_q^* \text{ mit der Basis } \{dx^i \otimes dx^j\} \equiv \{dx^1 \otimes dx^1, dx^1 \otimes dx^2, \dots\}$$

Man kann ihn als Raum der bilinearen Funktionalen auf $T_q M$ auffassen. Es gilt also z.B.:

$$(dx^i \otimes dx^j) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \cdot dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \delta^i_k \delta^j_l$$

Ein allgemeines Element ("Vektor") aus diesem Raum können wir demnach als

$$\omega^2(q) = \omega_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

schreiben, wobei $\omega^2 \in T_q^* \otimes T_q^* \equiv (T_q^*)^{\otimes 2}$.

Wenn wir statt des zweifachen, nun das p -fache Tensor-Produkt des Cotangentialraumes mit sich selbst betrachten, erhalten wir einen Tensor vom Rang p :

$$\omega^p(q) \in (T_q^*)^{\otimes p}, \quad \omega^p = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

Wir werden sehen, dass unter solchen Tensoren (Tensorfeldern) die **total antisymmetrischen** Tensoren eine besondere Rolle haben. Diese sind dadurch definiert, dass $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$ sein Vorzeichen wechselt, wenn man zwei beliebige benachbarte Indizes vertauscht.

Man schreibt:

$$\omega^p(q) \in (T_q^*)^{\wedge p} \subset (T_q^*)^{\otimes p}$$

und nennt $(T_q^*)^{\wedge p}$ den total antisymmetrischen Unterraum von $(T_q^*)^{\otimes p}$. Dies geht auch an allen Punkten $q \in M$ gleichzeitig. Wir haben dann ein (kovariantes; Index unten) antisymmetrisches Tensorfeld.

Dies ist eine p -Form.

Betrachte $\omega^p(q)$ an allen Punkten $q \in M$ gleichzeitig

$$\omega^p(x) \equiv \text{"p-Form"} \quad (\text{auch: Differentialform}) \quad x = \{x^1 \dots x^p\}$$

Hier der Fall mit Rang 2 ($p = 2$) explizit:

$$\omega^2(x) = \omega_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \quad \text{mit } \omega^{ij} = -\omega^{ji}$$

Die Basiselemente von $(T_q^*)^{\wedge p}$ bezeichnet man in Analogie zu denen von $(T_q^*)^{\otimes p}$, mit einem "wedge".

Also hat man z.B.

$$\omega^2(x) = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \equiv \omega_{ij}(x) \cdot \frac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$$

wobei das **äußere Produkt “ $\wedge$ ”** definiert ist als

$$dx^i \wedge dx^j \equiv dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$$

Konkretes Bsp: $d = p = 2$, mit $\varepsilon_{12} = 1, \varepsilon_{21} = -1$, sonst Null.

Wichtige, spezielle 2-Form

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1\end{aligned}$$

Eine solche spezielle p -Form in p Dimensionen gibt es für jedes p (“Top-Form”)

- Aber: $p > d$ geht nicht: z.B. $p = 2$ in $d = 1$: $dx^1 \wedge dx^1 = 0$ wegen Antisymmetrie
- Hingegen ist $p < d$ ohne Weiteres möglich. Allgemeine 2-Form in $d \geq 2$ Dimensionen:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j, \quad i, j = 1 \dots d, \quad d > 2$$

durch eine ortsabhängige, antisymmetrische $d \times d$ -Matrix $\omega_{ij}(x)$ gegeben.
Anwendung auf zwei Vektoren

$$u = U^i \partial_i \quad \text{und} \quad v = v^i \partial_i$$

ist mit unseren Definitionen leicht zu berechnen,

$$\omega^2(u, v) = \omega_{ij} u^i v^j$$

wobei man beim Nachrechnen die Antisymmetrie von ω_{ij} benutzen muss.

- Wir definieren noch den zentralen Begriff der äußeren Ableitung “ d ”

$$d : \omega^p \mapsto \omega^{p+1}$$

$$d(\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Wichtiges Beispiel:

Sei f eine Funktion, somit eine 0-Form, so gilt: $d(f) \equiv$ 1-Form (nach obiger Definition)

$$d(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = df \quad \leftarrow \text{unsere obige “besondere” 1-Form zu } f$$

Wichtiger allgemeiner Fakt:

$$d^2 \equiv d \circ d \equiv d(d(\cdot)) = 0$$

8.4 Hamilton-Mechanik in Formen

Def: Ein **Phasenraum** ist ein $2n$ -dimensionaler Raum (Mannigfaltigkeit mit $d = 2n$) mit einer **nicht-degenerierten, geschlossenen 2-Form**

$$\omega^2 \equiv \omega = \frac{1}{2} \omega_{ij}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j,$$

welche man auch eine symplektische Struktur nennt.

Nicht-degeneriert bedeutet, dass ω_{ij} an jedem Punkt ξ invertierbar ist, und **geschlossen** bedeutet $d\omega^p = 0$.

Eine Hamilton-Funktion $H = H(\xi) = H(\xi^1, \dots, \xi^{2n})$ ist eine Funktion auf dem Phasenraum.

Die Dynamik wird durch die Hamilton-Gleichungen definiert:

$$\begin{array}{ccc} \omega(\dot{\xi}) & = & dH \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{2-Form} & & \text{1-Form} \end{array}$$

Eine 2-Form braucht zwei Vektoren, um eine Zahl zu produzieren. Nun ist aber $\dot{\xi}$ nur ein Vektor, genauer ein Vektorfeld:

$$\dot{\xi} = \{\dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^{2n}\} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\xi} = \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

Es beschreibt die Bewegung auf dem Phasenraum in der Zeit $\Delta \xi^i \simeq \dot{\xi}^i \Delta t$.

Wir geben nun in obiger Formel ω nur ein solches Vektor-Argument:

$$\omega(\dot{\xi}) \equiv \omega(\cdot, \dot{\xi})$$

Es ist also noch ein Argument offen, so dass $\omega(\dot{\xi})$ nun eine 1-Form ist. Damit kann $\omega(\dot{\xi}) = dH$ als 1-Formen-Gleichung gelesen werden.

Jetzt wählen wir Koordinaten q^α, p_α ($\alpha = 1 \dots n$) auf M , sodass $\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha$ (Dies ist unter unseren Voraussetzungen stets möglich).

Mit

$$\xi^i = \{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$$

können wir in diesen Koordinaten schreiben

$$\omega_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right)_{ij}$$

Nebenbemerkung: Die Forderung $S\omega S^T = \omega$ (analog zu $R\mathbb{1}R^T = \mathbb{1}$) definiert die symplektischen Matrizen S und die Gruppen $\text{Sp}(2n) \ni S$ (analog zu $\text{SO}(n) \ni R$).

In den so speziell gewählten Koordinaten Können wir nun die Hamilton-Gleichungen auswerten.

$$\begin{aligned} \omega(\dot{\xi}) &= dp_\beta \wedge dq^\beta \left(\cdot, \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) \\ &= \dot{q}^\alpha dp_\alpha(\cdot) - \dot{p}_\alpha dq^\alpha(\cdot) \\ dH &= \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha(\cdot) + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha(\cdot) \\ \Rightarrow \dot{q}^\alpha dp_\alpha(\cdot) - \dot{p}_\alpha dq^\alpha(\cdot) &= \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha(\cdot) + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha(\cdot) \end{aligned}$$

Daraus folgen die Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad | \quad \text{in } \xi: \quad \omega_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial H}{\partial \xi^i}$$

Zum Verständnis:

$$\begin{aligned}
& dx \wedge dy (\cdot, v^x \partial_x + v_y \partial_y) \\
&= (dx \otimes dy - dy \otimes dx) (\cdot, v^x \partial_x + v_y \partial_y) \\
&= dx(\cdot) dy(v_y \partial_y) - dy(\cdot) dx(v^x \partial_x) \\
&= dx(\cdot) v_y - dy(\cdot) v^x
\end{aligned}$$

Beispiel zum Durchrechnen:

$$n = 1, \quad \omega = dp \wedge dq \equiv (dp \otimes dq - dq \otimes dp), \quad H = p^2 + q^2$$

Wir definieren als unsere Basisvektoren wie üblich

$$\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial p} \longrightarrow \dot{\xi} = \left\{ \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right\}$$

$$\begin{aligned}
dH = \omega(\dot{\xi}) &= \omega(\cdot, \dot{\xi}) \\
&= \omega \left(\cdot, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \\
&= (dp \wedge dq) \left(\cdot, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \\
&= (dp \otimes dq - dq \otimes dp) \\
&= dp(\cdot) \cdot dq \left(\cdot, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) - dq(\cdot) \cdot dp \left(\cdot, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) - dq(\cdot) \\
&= dp(\cdot) \cdot \dot{q} - dq(\cdot) \cdot \dot{p} \\
&= \dot{q} dp - \dot{p} dq
\end{aligned}$$

Nun wissen wir aber auch, dass

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp.$$

Mit unserer obigen Hamilton-Funktion und Koeffizientenvergleich folgt

$$dH = 2q dq + 2p dp = \dot{q} dp - \dot{p} dq.$$

Daraus folgt, dass

$$2p = \dot{q} \quad \text{und} \quad 2q = -\dot{p}$$

und als noch fundamentalere Ergebnisse unsere Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

9 Kanonische Transformationen, Integrabilität, Chaos

9.1 Kanonische Transformationen

Wir wissen schon aus vorherigen Kapiteln, dass die Lagrange-Mechanik unter Punkttransformationen invariant ist

$$q \rightarrow Q(q), \quad L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(Q, \dot{Q}, t),$$

also ist leicht nachzuprüfen, dass gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q} = 0.$$

Betrachten wir nun das analoge Problem des Variablenwechsels in der Hamilton-Mechanik, z.B.

$$q, p \rightarrow Q(q, p), P(q, p),$$

dies dies wegen der Aufteilung in Koordinaten und Impulse zunächst komplizierter aus. Die Antwort liefert uns die Diskussion des letzten Kapitels, in dem es uns gelungen ist, die Hamilton-Mechanik in Koordinaten ξ , einer Differentialform ω und der Funktion H auf dem $2n$ -dimensionalen Phasenraum zu definieren. In dieser Sprache gibt es keine Aufteilung in p und q . Sowohl ω als auch die Hamilton-Gleichungen sind in dieser Formulierung koordinatenunabhängig, wodurch wir beliebige Variablenwechsel

$$\xi \rightarrow \xi'(\xi)$$

zulassen können wie in der Lagrange-Mechanik.

Eine speziellere und sehr nützliche Art des Koordinatenwechsels nennen man **kanonische Transformationen**. Hier fordern wir, dass sich die Form der Hamilton-Gleichungen unter

$$q, p \rightarrow Q(q, p), P(q, p)$$

nicht ändert. Wir wissen, dass letztere aus ω folgen und ihre einfache, vertraute Form annehmen, wenn ω als Matrix die oben diskutierte Blockgestalt hat. Es reicht also zu verlangen, dass sich diese Form nicht ändert

$$\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha = dP_\alpha(q, p) \wedge dQ^\alpha(q, p).$$

Kanonische Transformationen sind demnach dadurch definiert, dass die explizite Form der symplektischen Struktur ω und damit auch die Form der Hamilton-Gleichungen respektieren.

Explizit starten wir beispielsweise mit der erzeugenden Funktion $F_2(q, P)$ und definieren

$$p = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P}.$$

Durch Auflösen nach Q und P finden wir

$$Q = Q(q, P), \quad P = P(q, P).$$

Offenbar gilt

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = p \cdot dq + Q \cdot dP.$$

Wir prüfen mit $d^2 = 0$ (doppelte Anwendung)

$$\begin{aligned} 0 &= d(p \cdot dq + Q \cdot dP) = dp \wedge dq + dQ \wedge dP \\ &= dp \wedge dq - dP \wedge dQ \\ &\Rightarrow dp \wedge dq = dP \wedge dQ \end{aligned}$$

Entsprechend stellen wir fest, dass

$$F_2(q, P) = q^\alpha \cdot P_\alpha$$

die Identität generiert.

F_2 generiert also eine bestimmte Klasse von Koordinatentransformationen, die automatisch kanonisch sind. Wir erwarten also, dass es ein spezielles F_2 gibt, das die Identität $Q = q$ und $P = p$ generiert. Es ist leicht zu prüfen, dass $F_2 = qP$ genau dies tut.

Eine Funktion, die nur geringfügig von dieser Form abweicht, wird demnach **kleine kanonische Transformationen** generieren

$$F_2(q, P) = q \cdot P + \varepsilon \cdot G(q, P).$$

Hierzu betrachten wir ε als infinitesimalen Parameter. Explizit finden wir

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P}.$$

Nun können wir aber in den Terme höherer Ordnung in ε die Ersetzung $P \rightarrow p$ machen. In führender Ordnung in ε gilt also

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \Delta p &= P - p = -\varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q} = \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \varepsilon \{p, G\} \\ \Delta q &= Q - q = \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p} = \varepsilon \left(\frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \varepsilon \{q, G\}. \end{aligned}$$

Damit zeigt sich: Die durch $F_2 = qP + \varepsilon G$ generierte infinitesimale kanonische Transformation entspricht der auf dem Phasenraum durch G induzierten Bewegung.

Kriterien für Kanonizität

1. Wir untersuchen, ob

$$\frac{\partial p_j}{\partial Q_m} \stackrel{!}{=} \frac{\partial P_m}{\partial q_j}.$$

2. Die Phasenraumtransformation ist genau dann kanonisch, wenn

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\} &= \delta_{ij} \\ \{Q_i, Q_j\} &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die kanonisch konjugierten Variablen q, p . Ist die folgende Transformation kanonisch?

$$Q = Q(p, q) = \arcsin \frac{q}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}$$
$$P = P(p, q) = \frac{1}{2} \left(\alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha} \right)$$

Lösung:

Die fundamentalen Poisson-Klammern sind trivial:

$$\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0.$$

Mit

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } |x| < 1$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}} \left(\frac{1}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}} - \frac{\frac{1}{2}q \cdot 2q}{\left(q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \left(1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \right) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{\frac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{p^2}{\alpha^2}}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}} \frac{-\frac{1}{2}q \frac{2p}{\alpha^2}}{\left(q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} \\ &= -\sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{qp}{\alpha^2 q^2 + p^2} \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= \alpha q \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{p}{\alpha} \end{aligned}$$

Damit ist die Poisson-Klammer

$$\begin{aligned} \{Q, P\}_{q,p} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\frac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha}{p} \frac{pq}{\alpha^2 q^2 + p^2} \alpha q \\ &= \frac{1}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + q^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

9.2 Integrabilität

Wir beginnen mit einer Definition: Ein System mit n Freiheitsgraden heißt integrabel, wenn es n unabhängige Erhaltungsgrößen f_α (mit $\alpha = 1, \dots, n$) gibt, sodass deren sämtliche Poisson-Klammern verschwinden

$$\{f_\alpha, f_\beta\} = 0.$$

Unabhängig heißt hierbei, dass die df_α an jedem Punkt ξ des Phasenraums M linear unabhängig in T_ξ^*M sind.

Die Bedeutung des Begriffs der Integrabilität folgt daraus, dass sich für solche Systeme stets eine kanonische Transformation finden lässt, sodass

$$P_\alpha = f_\alpha$$

die neuen kanonischen Impulse sind.

Die Notwendigkeit der Bedingung $\{f_\alpha, f_\beta\}_{p,q} = 0$ folgt aus $\{P_\alpha, P_\beta\}_{P,Q} = 0$ zusammen mit der Tatsache, dass die kanonischen Transformationen die Poisson-Klammer respektieren.

Da nun nach der Transformation alle Impulse konstant sind, also

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q^\alpha} = 0,$$

sind alle Q zyklisch. Die Bewegung ist damit sehr einfach

$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial H(Q, P)}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial H(P)}{\partial P_\alpha} = \text{const.} \Rightarrow Q^\alpha = Q_0^\alpha + t \cdot \frac{\partial H(P)}{\partial P_\alpha}.$$

Dass die Bedingung auch hinreichend für die Durchführbarkeit der gewünschten kanonischen Transformation ist, zeigen wir durch explizite Konstruktion. Gegeben seien nun n Erhaltungsgrößen $f_\alpha(q, p)$. Wir definieren $P_\alpha = f_\alpha(q, p)$ und lösen nach den alten p_α auf

$$p_\alpha = p_\alpha(q, P).$$

Jetzt betrachten wir unseren Phasenraum als „Schichtung“, wobei jede Schicht durch die Konstanz aller P_α definiert ist.

In jeder Schicht (also auch global) definieren wir

$$F_2(q, P) = \int_{\{q_0^\alpha\}}^{\{q^\alpha\}} dq'^\beta p_\beta(q', P),$$

mit $\{q_0^\alpha\}$ als Startpunkt unseres Linienintegrals. Dieses ist nach dem verallgemeinerten Satz von Stokes wegunabhängig. Dazu berechnen wir zunächst

$$d(dq^\alpha p_\alpha)|_\Sigma = dp_\alpha \wedge dq^\alpha|_\Sigma = \omega|_\Sigma$$

In der obigen Gleichung haben wir die Formen auf eine beliebige der Schichten (Hyperflächen) Σ eingeschränkt.

Jetzt betrachten wir die Vektorfelder $V(P_\alpha)$, welche die durch P_α induzierten Bewegungen auf dem Phasenraum beschreiben. Da die P untereinander verschwindende Poisson-Klammern haben, bleiben alle P bei der durch ein P_α induzierten Bewegung konstant. Also liegen die $V(P_\alpha)$ im Tangentialraum zu Σ und spannen diesen aus Dimensionsgründen an jedem Punkt auf. Außerdem haben wir, nach dem im vorherigen Abschnitt zur Beziehung zwischen Poisson-Klammer und ω gesagten,

$$0 = \{P_\alpha, P_\beta\} = \omega(V(P_\alpha), V(P_\beta))$$

Also gilt

$$d(dq^\alpha p_\alpha)|_\Sigma = \omega|_\Sigma = 0$$

so dass (9.24) wegunabhängig und F_2 wohldefiniert ist. Wir können den Weg also beliebig wählen, insbesondere zum Beispiel auch so, dass für ein gewisses $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ das letzte Stück parallel zur q^α -Achse verläuft. Dann gilt (ohne Summation!)

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int^{q^\alpha} dq'^\alpha p_\alpha(q^1, \dots, q'^\alpha, \dots, q^n, P) = p_\alpha$$

Damit haben wir gezeigt, dass F_2 das „richtige“ generierende Funktional ist. Wir definieren

$$Q^\alpha \equiv \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}$$

und sind mit unserer Konstruktion der gesuchten kanonischen Transformation fertig.

9.3 Chaos

Betrachten wir die Bewegung eines kleinen sphärischen Volumens $V(t_0) \sim r^{2n}$ im Phasenraum. Nach einer gewissen Zeit t werden wir ein anders geformtes Volumen an einem anderen Punkt des Phasenraums vorfinden. Man kann zeigen, dass die Deformation im Grenzwert $r \rightarrow 0$ bei festem t einfach ist: Aus der Kugel wird ein Ellipsoid, dessen Volumen nach dem Satz von Liouville jedoch dem einer Kugel gleich

$$V(0) = \frac{\pi^n}{n!} r^{2n} \quad \rightarrow \quad V(t) = \frac{\pi^n}{n!} \prod_{i=1}^{2n} a_i.$$

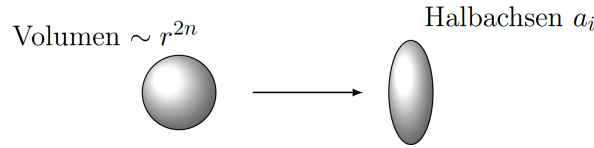


Abbildung 29: Kugel im Phasenraum transformiert zu Ellipsoid

Da diese Dynamik von Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben wird, ist das schnellstmögliche Wachstum von Abständen exponentiell:

$$a_i(t) \sim e^{\lambda_i t} \cdot r.$$

Wir erinnern daran, dass diese einfache Formel nur für sehr kleine r bei festem t gilt. Die λ_i heißen Lyapunov-Exponenten. Die genauere Definition lautet

$$\lambda_i \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a_i(t)}{r} \right).$$

Wegen Liouville gilt

$$\prod_{i=1}^{2n} (e^{\lambda_i t} \cdot r) = r^{2n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0.$$

Für integrable Systeme sind die P konstant und für die Q ist nur lineares Wachstum möglich:

$$Q_\alpha = t \cdot \text{const.}_\alpha + Q_\alpha^0$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln t = 0$$

verschwinden dann alle Lyapunov-Exponenten: $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, 2n$. Chaotische Systeme sind dadurch definiert, dass für mindestens ein i gilt: $\lambda_i > 0$. Da der Fall $n = 1$ stets integrabel ist, kann man leider kein anschauliches Beispiel im 2-dimensionalen Phasenraum geben. Ein etwas künstliches Beispiel (welches nicht auf echter hamiltonscher Dynamik basiert) liefert jedoch die „Bäckertransformation“.

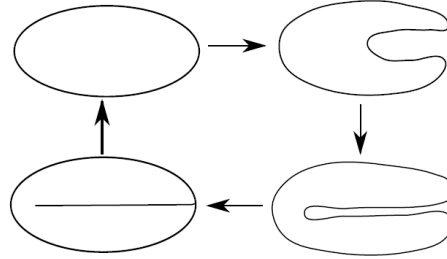


Abbildung 30: Bäckertransformation

Um diese genauer zu verstehen, berechnen wir den horizontalen Abstand zweier benachbarter Punkte (Abstand r bei $t = 0$) nach N Perioden, wobei noch annehmen, dass die Periodendauer τ ist:

$$a_1 = 2^N r = 2^{t/\tau} \cdot r$$

Wir finden somit

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{2^{t/\tau} r}{r} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(2^{t/\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \ln(2) > 0 ,$$

also Chaos.

Ein anderes Beispiel liefert ein „Billardtisch“ mit perfekter Reflexion am Rand:

Falls dieser rund ist, sind H und L erhalten und das System ist integrabel. Bei allgemein geformtem Rand ist nur H erhalten und das System ist chaotisch.

10 Schwingungen und Kontinua

10.1 Kleine Schwingungen allgemeiner Systeme

10.1.1 Ein Freiheitsgrad

Die allgemeine Lagrange-Funktion eines zeitunabhängigen, 1-dimensionalen Systems lautet

$$L = \frac{1}{2}f(q) \cdot \dot{q}^2 - V(q)$$

Sei q_0 eine Ruhelage. Das impliziert:

$$V'(q_0) = 0$$

Notation: $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f' \quad \wedge \quad \frac{d}{dt}f \equiv \dot{f}$

Definiere $\tilde{q}$ durch: $q = q_0 + \tilde{q}$, Umbenennung: $\tilde{q} \rightarrow q$.

$$L = \frac{1}{2}f(q_0 + q) \cdot \dot{q}^2 - V(q_0 + q)$$

Taylor-Entwicklung bis zur quadratischen Ordnung in q bzw. $\dot{q}$

$$= \frac{1}{2}f(q_0) \cdot \dot{q}^2 - V(q_0) - \frac{1}{2}V''(q_0) \cdot q^2 + O(q^3) + \dot{q}^2 O(q)$$

$V(q_0)$ ist irrelevant, da konstant; die Restterme $O(q^3)$, $\dot{q}^2 O(q)$ sind vernachlässigbar, da sie zu klein sind

$$L \simeq \frac{1}{2}f(q_0) \cdot \dot{q}^2 - \frac{1}{2}V''(q_0) \cdot q^2$$

$\Rightarrow$ Oszillator mit $\omega = \sqrt{\frac{V''}{f}} \rightarrow$ völlig unabhängig von Details des ursprünglichen Systems

10.1.2 Viele Freiheitsgrade

$$L = \frac{1}{2}f_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) \quad , \quad q = \{q_1, \dots, q_n\}$$

Sei $q_0 \equiv \{q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}\}$ eine Ruhelage, also:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}(q_0) = 0 \quad \forall i$$

Wie oben $q = q_0 + q$

$$L = \frac{1}{2}f_{ij}(q_0 + q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q_0 + q)$$

Annahme: $f_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji})\dot{q}_i\dot{q}_j$ (f - Symmetrisch)

Nutze Taylor für viele Variablen:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(0) + \frac{1}{2} x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(0) + \frac{1}{3!} x^i x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} f(0) + O(x^4)$$

$$L \simeq \frac{1}{2} f_{ij}(q_0) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij}(q_0) q_i q_j \quad \text{mit } V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}$$

Können O.B.d.A. annehmen, dass f_{ij} symmetrisch ist. Dann $\exists R \in \text{SO}(n)$, so dass

$$R f R^{-1} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

Definiere q' (keine Ableitung) durch: $q_i = (R^{-1})_{ij} q'_j \Rightarrow \dot{q}_i = (R^{-1})_{ij} \dot{q}'_j$

Es folgt dann:

$$L \simeq \frac{1}{2} \dot{q}'_i (R)_{ij} f_{jk} (R^{-1})_{kl} \dot{q}'_l - \frac{1}{2} q'_i (R)_{ij} V_{jk} (R^{-1})_{kl} q'_l$$

Mit $R_{ij} f_{jk} (R^{-1})_{kl} = (R f R^{-1})_{il} = \delta^{il} a_l$ und $R_{ik} V_{kl} (R^{-1})_{lj} \equiv M_{ij}$ folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \sum_i a_i (\dot{q}'_i)^2 - \frac{1}{2} q'_i M_{ij} q'_j$$

Definiere q'' durch: $q'_i = \sum_j \frac{q''_j}{\sqrt{a_i}}$, $a_i > 0$ (ansonsten unphysikalisches System)

$$L = \frac{1}{2} \sum_i (\dot{q}''_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} q''_i \frac{M_{ij}}{\sqrt{a_i a_j}} q''_j \quad \text{Mit } K_{ij} \equiv \frac{M_{ij}}{\sqrt{a_i a_j}}$$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}'')^T \mathbb{1} \dot{q}'' - \frac{1}{2} (q'')^T K q''$$

Da K symmetrisch ist, $\exists \tilde{R} \in \text{SO}(n)$, so dass $\tilde{R} \cdot K \cdot \tilde{R}^{-1} = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$

Definiere q''' durch: $q'' = \tilde{R}^{-1} q'''$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}''')^T \mathbb{1} \dot{q}''' - \frac{1}{2} (q''')^T \tilde{R} K \tilde{R}^{-1} q'''$$

Nun benennen wir $q''' \rightarrow q$ um:

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k_i q_i^2 \right)$$

$\rightarrow$ System von n Oszillatoren (unabhängig, harmonisch) mit Frequenz $\omega_i = \sqrt{k_i}$

Zu beachten: mathematisch denkbare $a_i < 0$ für gewisse i unphysikalisch – die kinetische Energie muss positiv sein. Es ist möglich, dass (für gewisse i) $k_i < 0$. Dann war die Ruhelage instabil. Falls $k_i = 0$ für gewisse i , dann ist unsere $O(q^2)$ -Analyse unzureichend, um zu entscheiden, ob der entsprechende Freiheitsgrad stabil oder instabil ist.

10.2 Lineare Kette

Als Einstieg in die Kontinua betrachten wir eine lineare Kette aus Massenpunkten der Masse m

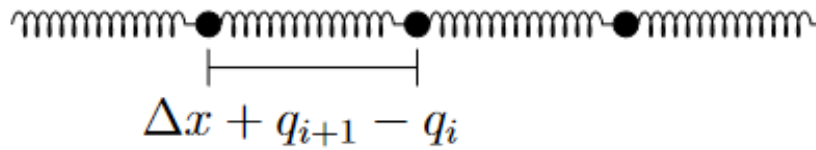


Abbildung 31: Skizze einer linearen Kette mit ungespannten Federn der Federkonstante k , der Länge Δx in Ruhe. Die Variablen q_i bezeichnen die Auslenkung vom Massenpunkt i aus seiner Ruhelage.

mit

$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{k}{2} (q_{i+1} - q_i)^2$$

Statt der Analyse mit 10.1.2 betrachten wir den **Kontinuumsimes**.

Dazu: Gehe von einem diskreten Satz von Funktionen q_i zu einer (kontinuierlichen) ortsabhängigen Auslenkung $q(x)$ der Massenpunkte in Kettenrichtung über.

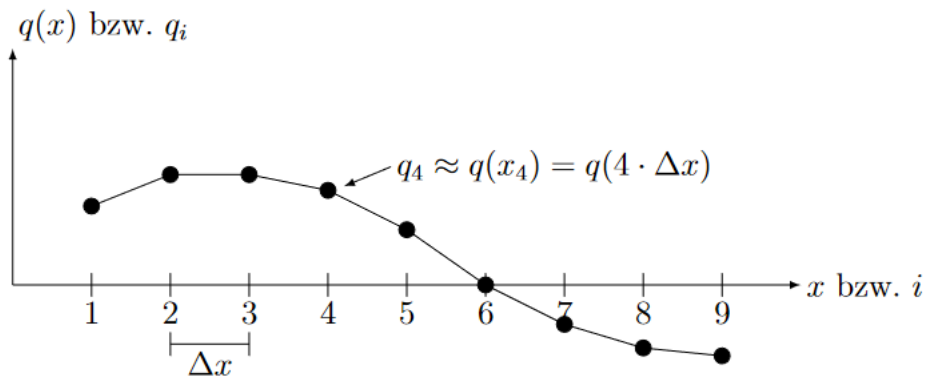


Abbildung 32: Bildung des Kontinuumslimes.

Wir bezeichnen mit x die Ortskoordinate der Kette, und mit $q_i = q(x_i)$ die Auslenkung aus der Ruhelage in x -Richtung am Ort x_i .

Die diskrete Version der Ableitung der Funktion $q(x)$ bezeichnen wir mit

$$q(x_{i+1}) - q(x_i) \simeq q'(x_i) \Delta x \quad \Rightarrow \quad q'(x_i) = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta x}$$

Für unsere Lagrange-Funktion ergibt sich:

$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{q}(x_i)^2 - \frac{k}{2} \cdot q'(x_i)^2 \cdot \Delta x \right]$$

$$L = \sum_i \Delta x \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{\Delta x} \right) \cdot \dot{q}(x_i)^2 - \frac{k \cdot \Delta x}{2} \cdot q'(x_i)^2 \right]$$

Jetzt nehmen wir den Limes $\Delta x \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, so dass aber $b = k \cdot \Delta x$ (Kompressionsmodul) und $\rho = \frac{m}{\Delta x}$ (Liniendichte) konstant bleiben.

Betrachte jetzt $q = q(x, t)$ als unsere dynamische Größe:

$$L = \int dx \underbrace{\left(\frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{b}{2} q'^2 \right)}_{\mathcal{L}} \quad \mathcal{L} - \text{Lagrange-Dichte, Lagrangian}$$

Damit: erste einfache (2-dim) Feldtheorie mit dem "Feld" $q(x, t)$ hergeleitet:

$$S = \int dt L = \int dt dx \mathcal{L}(q(x, t), \dot{q}(x, t), q'(x, t))$$

→ diese Form der Wirkung S ist typisch für Feldtheorie

Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamilton Prinzip:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \delta S = \int dt dx \left(\frac{\rho}{2} \cdot \delta(\dot{q}^2) - \frac{b}{2} \cdot \delta(q'^2) \right) \\ &\dots = \int dt dx (\rho \cdot \dot{q} \delta \dot{q} - b \cdot q' \delta q') \end{aligned}$$

partielle Integration in t und x liefert

$$= \int dt dx (-\rho \cdot \ddot{q} \delta q + b \cdot q'' \delta q) + \text{Randterme}$$

δq ist beliebig und wir vernachlässigen die Randterme

$$= \int dt dx \underbrace{(-\rho \cdot \ddot{q} + b \cdot q'')}_{\equiv 0} \cdot \delta q + \text{Randterme}$$

Wir erhalten also eine einfache Wellengleichung für eine solche lineare Welle:

$$\ddot{q} - c^2 q'' = 0$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c^2 = \frac{b}{\rho}$

Der echte, elastische Festkörper kann durch eine 3-dim. Verallgemeinerung der Wirkung beschrieben werden.

$$q(x, t) \rightarrow \vec{q}(\vec{x}, t) = \{q^1(\vec{x}, t), \dots, q^n(\vec{x}, t)\} \equiv \{q^i(\vec{x}, t)\}$$

q^i sei jeweils die Auslenkung in x^i -Richtung

$\vec{q}$ - Auslenkung eines Punktes bei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

→ Kompressions-, Scherungs-, Verdrillungswellen

Die beiden Terme der Lagrangian $\mathcal{L}$ verallgemeinern sich, wie folgt:

$$\begin{aligned} \int dx \frac{\rho}{2} \cdot \dot{q}^2 &\longrightarrow \int d^3x \frac{\rho}{2} \cdot \dot{\vec{q}}^2 \\ \int dx \frac{b}{2} \cdot q'^2 &\longrightarrow \int d^3x \frac{1}{2} b_{ij,kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} q^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} q^l \right) \end{aligned}$$

→ $b_{ij,kl}$ - kodiert verschiedene elastische Eigenschaften des Festkörpers

10.3 Schwingende Saite

Einfaches Spielzeugmodell für nichtrelativistische, klassische Stringtheorie

Neben einem schönen mechanischen System stellt die eingespannte, schwingende Saite ein besonders einfaches „Spielzeugmodell“ für eine nichtrelativistische, klassische Stringtheorie dar.

Im Gegensatz zur Kette ist die Auslenkung orthogonal zur x -Achse und wird sogar als dominierender Effekt angenommen. Zur Newtonschen Herleitung der Bewegungsgleichung betrachten wir folgende Abbildung.

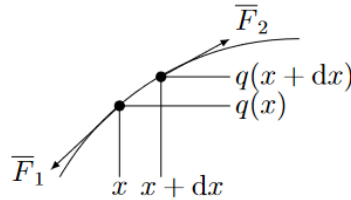
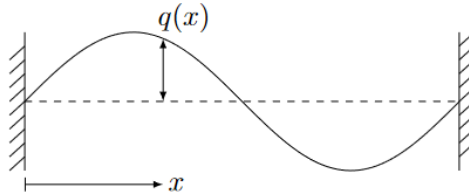


Abbildung 33: Schwingende Saite

Nach Newton gilt für das infinitesimale Stück

$$\rho \, dx \, \ddot{q}(x) = (\vec{F}_2 + \vec{F}_1)_\perp.$$

Sei F der Betrag der Kraft, mit der die Saite gespannt ist. (Kraftänderung durch Längenänderung wird vernachlässigt $\Delta F/F \ll 1$.) Dann gilt:

$$(\vec{F}_2)_\perp = F \cdot \sin \theta \approx F \cdot \tan \theta = F \cdot \frac{dq}{dx} = F \cdot q'(x+dx),$$

wobei θ der Winkel mit der Horizontalen ist. Das Argument $x+dx$ im letzten Ausdruck ergibt sich, weil die Betrachtung rechts am infinitesimalen Stück erfolgt. Demnach folgt links analog:

$$(\vec{F}_1)_\perp = -F \cdot q'(x)$$

Also finden wir

$$\rho \, dx \, \ddot{q}(x) = F \cdot [q'(x+dx) - q'(x)] \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot \ddot{q} - F \cdot q'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} - c^2 \cdot q'' = 0$$

mit $c^2 = F/\rho$. Die Lagrangesche Herleitung ist noch einfacher: Man überlegt sich sofort, dass

$$T = \int dx \frac{\rho}{2} \dot{q}^2, \quad \text{und} \quad V = F \cdot \Delta x = F \cdot \left[\int \sqrt{dx^2 + dy^2} - \int dx \right]$$

wobei Δx die gesamte Längenänderung der Saite ist. Elementare Geometrie liefert nun

$$V = F \cdot \int dx \left(\sqrt{1 + q'^2} - 1 \right) \simeq \int dx \frac{F}{2} q'^2$$

sodass

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{F}{2} q'^2.$$

Dies hat exakt die gleiche Form wie bei der Kette, aber mit $b \rightarrow F$. Wir finden also wieder

$$\ddot{q} - c^2 \cdot q'' = 0,$$

aber diesmal mit $c^2 = F/\rho$, in Übereinstimmung mit Newton.

Lösungen sind z.B.

$$q(x, t) = A \cdot \cos(k(x - ct)) \quad \text{und} \quad q(x, t) = B \cdot \sin(k(x - ct))$$

mit A, B, k beliebig. Da diese Gleichung linear ist, ist auch

$$q(x, t) = \int dk (A(k) \cdot \cos(k(x - ct)) + B(k) \cdot \sin(k(x - ct)))$$

eine Lösung. Hierbei treten $A(k)$ und $B(k)$ als frei wählbare Funktionen in der Lösung auf. Letzteres ist eine allgemeine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen. Der Name kommt daher, dass in t und x jeweils partielle Ableitungen in der Gleichung vorkommen.

$A(k)$ und $B(k)$ können benutzt werden, um die Anfangsbedingungen $q(x, 0)$ und $\dot{q}(x, 0)$ zu erfüllen. Außerdem haben wir i.A. noch Randbedingungen (wie $x = 0$ oder $x = L$) zu erfüllen.

Speziell für die Randbedingung $q(0) \equiv q(L) \equiv 0$ finden wir nur diskrete erlaubte Werte für k sowie bestimmte Relationen zwischen A und B . Es kommt dann zu stehenden Wellen. Wenn wir uns bei diesen dann auf hinreichend kleine k beschränken, ist unser Kontinuumslimit im Fall der Kette a posteriori gerechtfertigt.

Vorlesung 19, 22.06.21

10.4 Ideale Hydrodynamik (Fluid Dynamics)

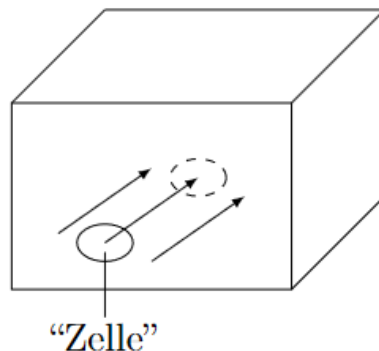


Abbildung 34: Strömende Flüssigkeit mit (gedachter) Zelle.

- keine mikroskopische Beschreibung (groß genug, dass noch viele Teilchen in ihr sind und wir sie als homogen empfinden; aber klein genug, um der Zelle eine Geschwindigkeit, eine Dichte, eine Temperatur zuzuordnen)
- Fassen diese Zellen zusammen in Feldern

Felder: Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x}, t)$, Druck $p(\vec{x}, t)$, Dichte $\rho(\vec{x}, t)$, ... ($\rightarrow$ spezielle Feldtheorie)

Newton für einzelne Zelle:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Hier ist $\frac{d}{dt}$ die sogenannte “Materialableitung” (substantial/ material derivative) $\equiv$ Bezug auf die sich bewegende Zelle

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

Kraft auf Zelle:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{äuß}} + \vec{F}_p \quad | \quad \vec{F}_{\text{äuß}} - \text{Grav.}, \text{Magnetfeld, etc.}; \vec{F}_p - \text{Druck}$$

$$\vec{F}_p = - \int_O p d\vec{f} \quad | \quad O \text{ sei die Oberfläche der Zelle, und } d\vec{f} \text{ der dazugehörige Flächenvektor}$$

Können die erste Komponente dieser Kraft mit Gauß in ein Volumenintegral umrechnen

Betrachte Projektion auf x^1 -Richtung:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{F}_p = - \int_O (\hat{e}_1 \cdot p) d\vec{f} = - \int_V \frac{\partial}{\partial x^1}(p) dV = -\hat{e}_1 \cdot \int_V (\vec{\nabla} p) dV$$

Ebenso mit $\hat{e}_2, \hat{e}_3$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= - \int_V (\vec{\nabla} p) dV \\ m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} &= \vec{F}_{\text{äuß}} - \vec{\nabla} p \cdot V_{\text{Zelle}} \\ m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} &= \vec{F}_{\text{äuß}} - \vec{\nabla} p \cdot V_{\text{Zelle}} \\ \Rightarrow m \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) &= \vec{F}_{\text{äuß}} - \vec{\nabla} p \cdot V_{\text{Zelle}} \quad | \cdot \frac{1}{V_{\text{Zelle}}} \\ \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) &= -\vec{\nabla} p + \frac{\vec{F}_{\text{äuß}}}{V_{\text{Zelle}}} \quad | \cdot \frac{1}{\rho} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\vec{F}_{\text{äuß}}}{\rho \cdot V_{\text{Zelle}}} \quad , \rho V_{\text{Zelle}} = m_{\text{Zelle}} \equiv m \\ \rightarrow \frac{\vec{F}_{\text{äuß}}}{\rho \cdot V_{\text{Zelle}}} &= \vec{f}_{\text{äuß}} \equiv \vec{a}_{\text{äuß}} \quad \leftarrow \text{äußere Kraftdichte (pro Masse)} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{Euler-Gleichung}} &= -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}_{\text{äuß}} \end{aligned}$$

Dazu kommt noch die Massenerhaltung (= Kontinuitätsgleichung).

Definieren zunächst das Vektorfeld $\vec{j} \equiv \rho \cdot \vec{v}$ “Masse pro Zeit, welche die gedachte kleine Fläche $d\vec{f}$ durchströmt”

Jetzt: Wähle festes (gedachtes) Volumen V in der Flüssigkeit mit Oberfläche O und berechne den Massenstrom aus diesem Volumen:

$$\int_O d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

Dies muss der Massenabnahme in diesem Volumen entsprechen:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = - \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$$

Da wir zu beliebig kleinen V übergehen können, müssen die Integranden gleich sein und es folgt die Kontinuitätsgleichung: $\bar{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Reicht immer noch nicht zur Beschreibung der Flüssigkeit

→ Brauchen noch die Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ (z.B. $p \sim \rho^\kappa$ (Adiabatengleichung) für ideales Gas)

Wir haben nun schließlich mit Eulergleichung + Kontinuitätsgleichung + Zustandsgleichung 5 Gleichungen (davon 4 partielle Dgl-en) für die 5 Felder ρ , p , $\vec{v}$. Das Problem ist damit prinzipiell gelöst.

Als einfache Anwendung: Bernoulli-Gleichung herleiten

- Sei $\rho = \text{const.}$, die Flüssigkeit also inkompressibel, und die Strömung stationär $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
- konservative äußere Kräfte: $\vec{f}_{\text{äuß}} = -\bar{\nabla} V$ (V - Potential pro Masse)

Aus Euler folgt:

$$(\vec{v} \cdot \bar{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\bar{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}_{\text{äuß}}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \bar{\nabla}) \vec{v} + \bar{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + V \right) &= 0 \quad | \quad (\vec{v} \cdot \bar{\nabla}) \equiv \frac{d}{dt} \text{ wegen Stationarität} \\ \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \bar{\nabla}) \left(\frac{p}{\rho} + V \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} + V \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + V \right) &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt die Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + V = \text{const.} \quad \leftarrow \text{ gilt entlang der Strömungslinien}$$

10.5 Potentialströmungen

Wirbelfreiheit: Definition:

$$\oint_C \vec{v} \, d\vec{s} = 0 \text{ bzw. } \bar{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

Falls sie gilt, bleibt sie (unter gewissen Voraussetzungen) erhalten.

“Kelvins Theorem” $\Rightarrow \exists \varphi$ so dass $\vec{v} = \nabla \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \xrightarrow[\rho = \text{const.}]{\text{Annahme}} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \varphi) &= 0 \Rightarrow \underbrace{\Delta \varphi = 0}_{\text{Laplace Gleichung}} \quad | \quad \Delta \equiv \nabla^2 - \text{Laplace Operator} \end{aligned}$$

Viele mächtige Methoden zur Lösung

10.6 Navier-Stokes-Gleichung

Betrachte Euler-Gleichung, zur Vereinfachung: mit $\vec{f}_{\text{äuß}} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p$$

In realen Flüssigkeiten gibt es Reibung



Abbildung 35: neuer Beitrag der inneren Reibung zur Kräftebilanz

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \cdot \Delta \vec{v} \quad | \quad \eta - \text{dynamische Viskosität}$$

11 Statistische Mechanik: Kinetik

Fokus: ungeordnete Bewegung der Teilchen eines Gases

11.1 Verteilungsfunktion im Phasenraum

Teilchen im Volumen V , nicht wechselwirkend; typische Zahl: $\sim 10^{23}$ (Avogadro); für jedes Teilchen: $\vec{q}, \vec{p}$.

Betrachte kleine Phasenraumvolumen: $\Delta q^3 \cdot \Delta p^3$.

Darin ΔN Teilchen, von N Teilchen insgesamt. $N \gg \Delta N \gg 1$.

Definiere Verteilungsfunktion

$$f(\vec{q}, \vec{p}, t) = \left(\lim_{\Delta q, \Delta p \rightarrow 0} \right) \frac{\Delta N}{\Delta q^3 \cdot \Delta p^3}$$

kein mathematischer Limes $\rightarrow \Delta q, \Delta p$ müssen groß genug bleiben um $\Delta N \gg 1$ zu erfüllen.
 f ist die Teilchendichte im Phasenraum

- $\vec{q}, \vec{p}$ Abhängigkeit: Volumen $\Delta q^3 \cdot \Delta p^3$ ist um die Position $\vec{q}, \vec{p}$ im Phasenraum zentriert. Anschaulich ist diese Verteilungsfunktion f also die Teilchen-Dichte im Phasenraum
- Gesamtteilchenanzahl:

$$N = \int_V d^3\vec{q} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \cdot f(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

- Teilchendichte am Ort $\vec{q}$:

$$n(\vec{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \cdot f(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Vorlesung 20, 24.06.21

Uns interessiert die zeitliche Entwicklung von f .

→ jedes Teilchen unterliegt der Hamilton-Dynamik, welche wiederum dem Satz von Liouville gehorcht.

Größe der Teilvolumina ändert sich demnach nicht (inkompressible Strömung im Phasenraum)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_{\vec{q}} f) \cdot \dot{\vec{q}} + (\nabla_{\vec{p}} f) \cdot \dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{q}} &\equiv \frac{\vec{p}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} \equiv \vec{F} \quad (\text{z.B. } -m\vec{g}) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_{\vec{q}} f) \cdot \frac{\vec{p}}{m} + (\nabla_{\vec{p}} f) \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Neuer Schritt: Stöße zwischen Teilchen sind zugelassen $\Rightarrow \frac{df}{dt} \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\nabla_{\vec{q}} f) \cdot \frac{\vec{p}}{m} - (\nabla_{\vec{p}} f) \cdot \vec{F} + \frac{df}{dt}$$

Wir geben den drei Termen auf der rechten Seite Namen, die ihre physikalische Bedeutung widerspiegeln.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Diffusion}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{äuß. Kraft}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Collision}}$$

Sehr allgemeine Form der Boltzmann-Gleichung

11.2 Boltzmann-Gleichung

Wir spezifizieren den Kollisionsterm:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Collision}}$$

Wir müssen dabei zwei wichtige Annahmen machen: Es liegt eine starke Verdünnung vor (sodass es nur zu binären Stößen kommt) und eine Unabhängigkeit der stoßenden Teilchen (Stoßzahlansatz, englisch „molecular chaos“). Quantitativ bedeutet das, dass die Zahl der Teilchenpaare am Ort $\vec{q}$ (also Volumen im Δq^3) mit Impulsen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ (im Volumen Δp^3) proportional ist zu

$$f(\vec{q}, \vec{p}_1, t) \cdot f(\vec{q}, \vec{p}_2, t).$$

Wir betrachten jetzt den ersten oben bereits erwähnten Beitrag zum Kollisionsterm: Ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}_1$ stößt ein anderes $\vec{p}_2$ und verschwindet deshalb aus unserem Volumen $\Delta q^3 \Delta p^3$. Dies wollen wir wie folgt quantifizieren

$$\left(\frac{df}{dt}\right)(\vec{q}, \vec{p}_1, t) = - \int d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_1' d^3 \vec{p}_2' \tilde{\tau}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_1', \vec{p}_2') \cdot f(\vec{q}, \vec{p}_1, t) \cdot f(\vec{q}, \vec{p}_2, t).$$

In diesem Ausdruck integrieren wir über den Impuls p_2 des Stoßpartners sowie die neuen Impulse. Die Funktion τ spezifiziert, wie oft die Kollision von Teilchen mit $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ zu Teilchen mit den neuen, gestrichenen Impulsen führt. Wir sprechen hierbei vom collision kernen oder Integrationskern τ , der sich aber noch geringfügig von $\tilde{\tau}$ unterscheidet.

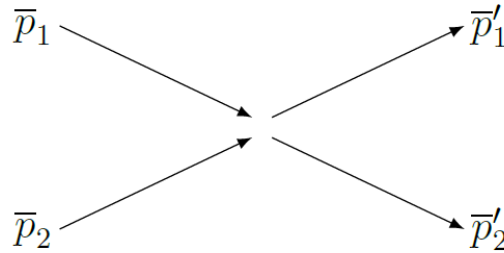


Abbildung 36: Teilchenkollision (man denke an Billard)

11.3 Delta-Funktion (M)

Um den Unterschied zwischen $\tilde{\tau}$ und τ zu konkretisieren, brauchen wir eine grobe Vorstellung der Delta-Funktion. Diese sei durch folgende Eigenschaften definiert:

$$\int \delta_\epsilon(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = 0 \forall x \neq 0.$$

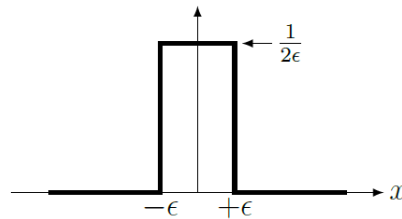


Abbildung 37: δ -Funktion

Etwas besser ist es, zu sagen, dass $\delta(x)$ durch die beiden Bedingungen

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \delta(x) = 0, \forall x \neq 0$$

definiert ist, wobei man nur Ausdrücke mit $\delta(x)$ zulässt, die aufgrund dieser beiden Bedingungen eindeutig auswertbar sind. Noch besser ist es, sich δ als Funktional vorzustellen,

$$f \mapsto \int f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

wobei das Integral rechts nur eine bequeme Schreibweise ist - der eigentliche Gehalt ist die Zuordnung $f \rightarrow f(0)$

Wir wollen es dabei bewenden lassen und uns darauf einigen, dass $\delta(x)$ eine Funktion ist, die 'ganz scharf' bei 0 lokalisiert und auf 1 normiert ist. Klarerweise ist dann $\delta(x - x_0)$ entsprechend scharf bei x_0 lokalisiert und es gilt:

$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Weiterhin benutzen wir die Schreibweise

$$\delta^3(\vec{x}) = \delta(x^1) \cdot \delta(x^2) \cdot \delta(x^3)$$

wenn wir z. B. mir drei Variablen gleichzeitig arbeiten.

Boltzmann-Gleichung (Fortsetzung)

Jetzt können wir die beim elastischen Stoß stets geltende Energie- und Impulserhaltung durch

$$\delta^4(P_f - P_i) \equiv \delta(E_f - E_i) \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i)$$

erzwingen, wobei

$$\vec{p}_i \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p}_f \equiv \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

und

$$E_i \equiv E_1 + E_2 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m}, \quad E_f \equiv E'_1 + E'_2 = \frac{\vec{p}'_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}'_2^2}{2m},$$

und die Indizes i/f für 'initial' und 'final' stehen. Für 'Teil a' des Stoßterms können wir nun

$$\left(\frac{df_1}{dt} \right)^{(a)}(\vec{q}, \vec{p}_1, t) = - \int d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}'_1 d^3\vec{p}'_2 \delta^4(P_f - P_i) \cdot \tau(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2) \cdot f(\vec{q}, \vec{p}_1, t) f(\vec{q}, \vec{p}_2, t)$$

schreiben. Dabei haben wir von der sehr wichtigen dynamischen Größe τ , dem Integrationskern oder Collision kernel, den prozessunabhängigen Energie- und ImpulserhaltungsConstraint in Form der δ^4 -Funktion abgetrennt.

Es ist jetzt offensichtlich, wie 'Teil b' aussieht, welcher die Streuung eines 'fremden' Teilchens in 'unser' Phasenraumvolumen $\Delta q^3 \Delta p^3$ beschreibt:

$$\left(\frac{df_1}{dt} \right)^{(b)} = + \int d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}'_1 d^3\vec{p}'_2 \delta^4(P_f - P_i) \cdot \tau(\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) \cdot f(\vec{q}, \vec{p}'_1, t) f(\vec{q}, \vec{p}'_2, t)$$

Die relevanten Wahrscheinlichkeiten sind jetzt durch die Phasenraum-Dichten bei Impulsen p'_1 und p'_2 gegeben und der dynamische Prozess ist schlicht die Umkehrung dess

In sehr vielen Fällen ist die Dynamik im Allgemeinen und die Streudynamik im Besonderen zeitumkehrinvariant ist, und zwar sowohl klassisch als auch quantenmechanisch:

$$\tau(\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \tau(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{Coll.}} &= \int d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}'_1 d^3\vec{p}'_2 \cdot \delta^4(P_f - P_i) \cdot \tau(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2) \\ &\quad \times (f(\vec{q}, \vec{p}'_1, t) f(\vec{q}, \vec{p}'_2, t) - f(\vec{q}, \vec{p}_1, t) f(\vec{q}, \vec{p}_2, t)) \end{aligned}$$

Eingesetzt in obige Formel für die Boltzmann-Gleichung liefert dies die allgemeine Formulierung.

Man kann nun (mit einiger rechnerischen Mühe aber ohne neue Ideen) den Integrationskern durch den Wirkungsquerschnitt ausdrücken. Wir geben das Resultat ohne Beweis an,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Coll.}} = \int d^3\vec{p}_2 \int d\Omega |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \Omega) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2)$$

wobei $d\Omega$ die Integration über die Richtung der Streuprodukte im Schwerpunktsystem bezeichnet und wir für die relevante Kombination der Verteilungsfunktionen eine hoffentlich selbsterklärende Kurzform gewählt haben.

11.4 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Zur Vereinfachung sei nun die äußere Kraft Null, $\vec{F} = 0$, und die Dichte im Konfigurationsraum homogen, $f(\vec{q}, \vec{p}, t) = f(\vec{p}, t)$. Es folgt

$$\frac{\partial f(\vec{p}_1, t)}{\partial t} = \int_{\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}'_2} \delta^4(P_f - P_i) \cdot \tau \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2)$$

Wir sehen, dass die Bedingung

$$f_1 f_2 = f'_1 f'_2$$

hinreichend für das Vorliegen von Gleichgewicht (also Zeitunabhängigkeit von f) ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus Boltzmanns H -Theorem. Dazu definiert man das Funktional

$$H[f] \equiv \int d^3\vec{p} \cdot f(\vec{p}) \cdot \ln(f(\vec{p})).$$

Wenn nun sich nun f zeitlich entwickelt, so kann man zeigen, dass

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

und sogar

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'_1 f'_2 = f_1 f_2.$$

H ist eng mit der Entropie und das H -Theorem mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik verbunden. Für uns impliziert es vor allem, dass die Bedingung $f'_1 f'_2 - f_1 f_2 = 0$ notwendig für das Vorliegen von Gleichgewicht ist. Eine äquivalente Schreibweise der Gleichgewichtsbedingung ist

$$\ln f(\vec{p}_1) + \ln f(\vec{p}_2) = \ln f(\vec{p}'_1) + \ln f(\vec{p}'_2).$$

Dies hat die Form eines Erhaltungssatzes für $2 \rightarrow 2$ -Prozesse (man denke zum Beispiel an $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$). Wenn wir also eine Erhaltungsgröße $\chi(\vec{p})$ kennen und f durch

$$f(\vec{p}) \equiv \text{const.} \cdot \chi(\vec{p})$$

definieren, erhalten wir stets eine Gleichgewichtsverteilung. Der allgemeine Ansatz für f ist also

$$\ln f(\vec{p}) = \sum_i \chi_i(\vec{p})$$

wobei χ_i über alle Erhaltungsgrößen läuft. Im allgemeinen Fall erhalten sind nur: $1, \vec{p}$ (also p_1, p_2, p_3) und $E = \vec{p}^2/2m$. (Den Drehimpuls können wir nicht zulassen, weil dieser $\vec{q}$ involviert.) Wir haben also

$$\ln f = a + b \cdot p_1 + c \cdot p_2 + d \cdot p_3 + e \cdot \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

mit fünf frei wählbaren Konstanten $a, \dots, e$. Man kann dies umschreiben als

$$\ln f = -A (\vec{p} - \vec{p}_0)^2 + \ln C$$

was immer noch die allgemeinste Linearkombination von $1, \{p_i\}$ und E ist. Es folgt

$$f(\vec{p}) = C \cdot e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}.$$

In dieser Form lässt sich die physikalische Bedeutung der einzelnen Koeffizienten bequem diskutieren. Wir stellen fest, dass $\vec{p}_0$ den Mittelwert des Impulses beschreibt.

Vorlesung 21, 29.06.21

11.5 Mittelwert (M)

Wenn wir eine Größe F , N -mal messen können, so ist der Mittelwert definiert durch

$$\langle F \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(i) = \frac{\sum_{i=1}^N F(i)}{\sum_{i=1}^N 1} \rightarrow \frac{\int d^3q d^3p f \cdot F}{\int d^3q d^3p f}$$

Dies überträgt sich auf unseren Fall des verdünnten Gases mit Verteilungsfunktion $f(q, p)$ im Phasenraum. Dazu betrachten wir eine Größe $F = F(\vec{q}, \vec{p})$ und definieren:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\vec{q}_i, \vec{p}_i)$$

Näherung: Alle Teilchen in kleinem Teilvolumen α haben gleiches $\vec{q}, \vec{p} \Rightarrow \vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle F \rangle &\simeq \frac{1}{N} \sum_{\alpha} F(\vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha) \cdot N_\alpha \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha} F(\vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha) \cdot (f(\vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha) \cdot \Delta q_\alpha^3 \Delta p_\alpha^3) \end{aligned}$$

N_α - Zahl der Teilchen in Teilvolumen α , $\Delta q_\alpha^3 \Delta p_\alpha^3$ - Volumen von Teil α

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle F \rangle &\simeq \frac{1}{N} \int d^3\vec{q} d^3\vec{p} F(\vec{q}, \vec{p}) f(\vec{q}, \vec{p}) \\ &= \frac{\int d^3\vec{q} d^3\vec{p} F(\vec{q}, \vec{p}) f(\vec{q}, \vec{p})}{\int d^3\vec{q} d^3\vec{p} f(\vec{q}, \vec{p})} \end{aligned}$$

homogener Fall:

$$\langle F \rangle = \frac{\int d^3\vec{p} F(\vec{p}) f(\vec{p})}{\int d^3\vec{p} f(\vec{p})}$$

Maxwell-Boltzmann (Fortsetzung)

Betrachte die 3 Observablen $\{F^1, F^2, F^3\} = \vec{F}(\vec{p}) = \{p^1, p^2, p^3\}$.

Berechne: $\langle F^1 \rangle \equiv \langle p^1 \rangle$

$$\begin{aligned}\langle p^1 \rangle &= \frac{\int d^3\vec{p} \cdot p^1 C e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}}{\int d^3\vec{p} \cdot C e^{-A(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}} \\&= \frac{\int dp^1 dp^2 dp^3 \cdot p^1 C e^{-A((p^1-p_0^1)^2+(p^2-p_0^2)^2+(p^3-p_0^3)^2)}}{\int dp^1 dp^2 dp^3 \cdot C e^{-A((p^1-p_0^1)^2+(p^2-p_0^2)^2+(p^3-p_0^3)^2)}} \\&\Rightarrow \langle p^1 \rangle = p_0^1 \quad (\text{Analog für } p^2, p^3)\end{aligned}$$

OBdA: gehe ins Ruhesystem des Gases, so dass $\vec{p}_0 = 0$

Berechne Erwartungswert von

$$F(\vec{p}) \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Rechnung wie oben:

$$\vec{p}^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2$$

und

$$\int d^3\vec{p} = \int dp^1 \int dp^2 \int dp^3$$

Für den Erwartungswert der Energie eines Teilchens ε folgt:

$$\varepsilon = \left\langle \frac{\vec{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{4Am}$$

Definition der Temperatur:

$$\frac{1}{2}kT \equiv \frac{\varepsilon}{n_f} = \frac{1}{4Am}$$

mit n_f - Zahl der Freiheitsgrade eines Teilchens (hier: $n_f = 3$) und $k \equiv k_B$ als Boltzmann-Konstante.

Die natürliche Einheit der Temperatur ist die der Energie (Achtung: es gibt andere Temperatur-Definitionen).

Wir haben: $A = \frac{1}{2mkT}$

$$\Rightarrow f(\vec{p}) = C e^{-A\vec{p}^2} = C e^{-\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right) \frac{1}{kT}} = C e^{-\frac{E(\vec{p})}{kT}}$$

C folgt aus:

$$\begin{aligned}N &= \int d^3\vec{q} d^3\vec{p} f(\vec{p}) = V \cdot \int d^3\vec{p} f(\vec{p}) \\n &= \frac{N}{V} = \int d^3\vec{p} f(\vec{p}) \Rightarrow C = \dots\end{aligned}$$

Endergebnis:

$$f(\vec{p}) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{E(\vec{p})}{kT}}$$

11.6 Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit äußerer, konservativer Kraft

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\vec{p}_1}{m} \nabla_q f_1}_{\text{Diffusion}} - \vec{F}_{\text{äuß}} \cdot \nabla_p f_1 + \int \delta^4(\dots) \tau \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \quad \text{Notation: } f'_1 = f(\vec{q}_1, \vec{p}'_1)$$

Wir nehmen an, dass die typische freie Weglänge ($\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = \vec{q}'_1 = \vec{q}'_2 = \vec{q}$) $\ll$ typische Längenskala des Potentials (Länge ab der ein signifikanter Unterschied im Potential bemerkbar ist)

$\Rightarrow$ Collision-Term bleibt Null, wie bei Analyse ohne Kraftfeld (gegeben eine entsprechende Abhängigkeit von f von $\vec{p}$).

Unsere Gleichgewichtsforderung lautet jetzt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 = -\frac{\vec{p}}{m} \nabla_q f(\vec{q}, \vec{p}) + (\nabla_q V(\vec{q})) \cdot \nabla_p f(\vec{q}, \vec{p}) + \text{Collision-Term}$$

gleiche f Abhängigkeit wie beim homogenen Gas; kurze, mittlere freie Weglänge

Ansatz: $f(\vec{q}, \vec{p}) = f_0(\vec{p})g(\vec{q})$, wobei f_0 die Boltzmann Verteilung ohne äußere Kraft darstellt (siehe Oben).

$$0 = -\frac{\vec{p}}{m} \nabla_q (f_0(\vec{p})g(\vec{q})) + (\nabla_q V(\vec{q})) \cdot \nabla_p (f_0(\vec{p})g(\vec{q}))$$

Aus kurzer Nebenrechnung: $\nabla_p f_0(\vec{p}) = -\frac{\vec{p}}{mkT} f_0(\vec{p})$

$$0 = -\frac{\vec{p}}{m} (\nabla_q g(\vec{q})) \cdot f_0(\vec{p}) - \frac{\vec{p}}{mkT} \cdot \nabla_q V(\vec{q}) g(\vec{q}) f_0(\vec{p})$$

Wir suchen eine Lösung, die diese Gleichung erfüllt (nicht unbedingt die allg. Lösung)

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla_q g(\vec{q}) - g(\vec{q}) \frac{\nabla_q V(\vec{q})}{kT} \\ \Rightarrow \frac{\nabla_q g}{g} &= -\frac{\nabla_q V}{kT} \\ \Leftrightarrow \nabla \ln(g) &= -\nabla \left(\frac{V}{kT} \right) \\ \Leftrightarrow \ln(g) &= -\frac{V}{kT} \end{aligned}$$

Eine Lösung ist:

$$g = \text{const} \cdot e^{-\frac{V}{kT}}$$

Mit unserem bekannten f_0 folgt:

$$f(\vec{q}, \vec{p}) = C e^{-\frac{E(\vec{q}, \vec{p})}{kT}}$$

mit $E(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$ und C wird aus N bestimmt: $N = \int_{\text{Vol.}} d^3\vec{q} d^3\vec{p} \cdot f(\vec{q}, \vec{p})$

11.7 Diffusion

(siehe Skript)

12 Statistische Mechanik: Thermodynamische Gesamtheiten (Statistical Ensembles)

12.1 Der Γ -Raum

Bisher: Beschreibung durch Verteilungsfunktion $f(\vec{q}, \vec{p})$ auf dem 1-Teilchen-Phasenraum $\equiv \mu$ -Raum

Jetzt: Wechsel zum N-Teilchen-Phasenraum $\equiv \Gamma$ -Raum

Koordinaten: $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N \Rightarrow 6N, N \sim 10^{23}$

Gesamtes Gas: charakterisiert durch einen einzigen Punkt im Γ -Raum. (vorher: N Punkte im μ -Raum $\Rightarrow f$ auf μ -Raum)

Explizite Beschreibung unmöglich; uns interessiert auch nur eine "makroskopische Beschreibung"

Fassen alle Mikrozustände zusammen, die zu einem beobachtbaren Zustand gehören

$\rightarrow$ Unser Wissen wird immer unvollständig bleiben $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit

12.2 Wahrscheinlichkeit (M)

Ereignisraum Menge M aller Elementarereignisse

Bsp: 2-facher Münzwurf:

$$M = \{KK, ZZ, KZ, ZK\}$$

Ereignis: Jedes Ereignis ist eine Untermenge von M

Bsp: Zwei mal gleiches Ereignis:

$$A = \{KK, ZZ\} \subset M$$

Bsp: Das "unmögliche Ereignis":

$$A = \emptyset \subset M$$

Wahrscheinlichkeit anschaulich: Aussage über Erwartung bzgl. des Ausganges eines Experimentes

etwas naheliegender, aber eingeschränkter ("limiting frequency"): z.B.

$$P(\{KK, ZZ\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k \text{ Anz. Treffer}}{N \text{ Anz. Versuche}}$$

Formale Definition

Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion

$$P : \{\text{subset of } M\} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto P(A) \in \mathbb{R}$$

welche die Kolmogorov-Axiome erfüllt:

$$(I) : P(A) \geq 0 \quad \forall A$$

$$(II) : P(M) = 1$$

$$(III) : P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \quad \text{für disjunkte } A_i$$

I sei eine beliebige Indexmenge (auch ∞); für disjunkte Indexmengen gilt: $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

12.3 Maß und Wahrscheinlichkeitsraum

Wir definieren den wichtigen Begriff des Maßes:

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Familie $\mathfrak{A}$ von Untermengen von M heißt σ -Algebra, falls

$$\text{I } A \in \mathcal{A} \Rightarrow M \setminus A \in \mathcal{A}$$

II Für jede Folge $\{A_i\}$ mit $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. Des Weiteren heißt eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ Maß, falls

$$\text{I } \mu(\emptyset) = 0$$

$$\text{II } \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \text{ für jede Folge disjunkter Elemente } A_i \text{ aus } \mathfrak{A}.$$

Schließlich der für uns hier relevante Begriff: Falls $\mu(M) = 1$, heißt das Tripel $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Der entscheidende neue Punkt ist, dass man mit diesem Begriff auch Situationen zulässt, in denen nicht alle Teilmengen von M als Ereignisse zugelassen sind.

Der Γ -Raum (Fortsetzung)

Uns wird meist der kontinuierliche Fall, also z. B. $M = \mathbb{R}$, interessieren. In solchen Situationen wird die Wahrscheinlichkeit oft durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ angegeben:

$$P([x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} dx p(x)$$

Analog hat man z.B. für $M = \Gamma = \mathbb{R}^{6N}$:

$$P(O) = \int_O d^{6N} \vec{\xi} p(\vec{\xi})$$

wobei O ein Gebiet in $\mathbb{R}^{6N}$ ist und $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^{6N}$.

12.4 Das mikrokanonische Ensemble

Nach den obigen Vorbereitungen kommen wir zu den thermodynamischen Gesamtheiten oder Ensembles, unter denen das mikrokanonische Ensemble das wahrscheinlich einfachste ist.

Es stellt die Gesamtheit aller Mikrozustände mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dar, welche zu dem makroskopischen Zustand eines Systems mit konstanter Gesamtenergie gehören: $E = E_{tot} = \text{const.}$ Für unser Beispiel „Gas im Kasten“ bedeutet das, dass die Wände elastisch reflektieren.

Wir machen außerdem noch die entscheidende **Gleichwahrscheinlichkeitsannahme**: Jede Phasenraumzelle in Γ ist gleich wahrscheinlich.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Gases bedeutet das:

$$\rho = \rho(q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}) = \rho(p_1, \dots, p_{3N}) = \text{const.} \cdot \delta\left(E - \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}\right).$$

Da wir die Energie nicht exakt kennen können, ist es angenehmer, nur zu fordern, dass

$$H \in [E - \Delta E, E].$$

Das entsprechende ρ ist innerhalb der so definierten Kugelschale konstant, außerhalb 0. Die Normierung, also der Wert innerhalb der Kugelschale ist festgelegt durch

$$\int_{\Gamma} d^{6N} \cdot \vec{\xi} \cdot \rho(\vec{\xi}) = V^N \cdot \int dp_1 \dots dp_{3N} \rho(p_1, \dots, p_{3N}) = V^N V_{\text{Kugelschale}} \rho_{\text{Kugelschale}} = 1.$$

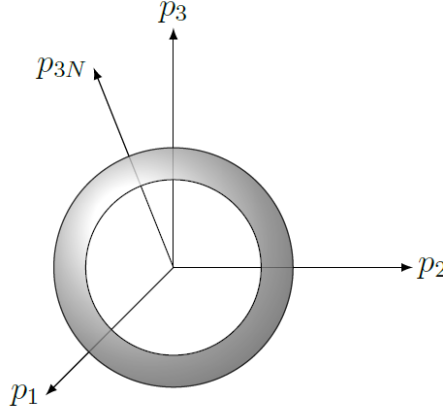


Abbildung 38: Illustration unserer Forderung

Im Folgenden überprüfen wir die Konsistenz dieses Konzepts mit der Boltzmann-Verteilung.

12.5 Boltzmann-Verteilung als wahrscheinlichste Verteilung

Wir wollen eine Verbindung zwischen Phasenraumverteilungen $f(\vec{q}, \vec{p})$, also Funktionen auf dem μ -Raum, und Wahrscheinlichkeitsdichten im N -Teilchen Phasenraum (Funktionen auf dem Γ -Raum) herstellen. Dazu zerlegen wir beide Räume in kleine Zellen, sodass alle Variablen nur diskrete Werte annehmen.

In diesem Bild von einem in Zellen eingeteilten μ - und Γ -Raum haben wir nun folgende entscheidende Tatsache: Einer Phasenraumverteilung $f(\vec{q}, \vec{p})$ entspricht ein Gebiet $\mathcal{O}[f]$ im Γ -Raum mit einem Volumen $\Omega[f]$.

In unserem Gas nummerieren wir nun die k Zellen des μ -Raums ($k \gg 1$), jede mit einem Volume $\Delta p^3 \Delta q^3 \equiv \omega$ durch einen Index $i \in \{1, \dots, k\}$. Die Verteilungsfunktion f wird damit zu einem Satz von Zahlen f_i , welche jeweils die Teilchendichte in der Zelle i beschreiben

$$n_i = \int_{\text{Zelle } i} d^3 \vec{q} d^3 \vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}) = f_i \cdot \omega.$$

Wir wählen dabei ω zwar klein, aber trotzdem groß genug, damit in jeder Zelle noch viele Teilchen $n_i \gg 1$ sind. Das diesem f entsprechende Volumen im Γ -Raum ist

$$\Omega[f] = \omega^N \cdot \frac{N!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Dabei ist letzterer Faktor die Zahl der Möglichkeiten, N Teilchen auf k Zellen zu verteilen, sodass die Zelle i n_i Teilchen hat. Diese Information ist im Γ -Raum darstellbar, aber nicht in μ . Daher entsteht beim Übergang von f zu Ω dieser Zusatzfaktor. Wir können nun eine Wahrscheinlichkeitsdichte ρ_f auf Γ einführen, die innerhalb von $\mathcal{O}[f]$ konstant und sonst Null

ist, und damit weiterarbeiten. Aber es ist einfacher, mit der Gleichwahrscheinlichkeitsannahme direkt zu schließen, dass die Wahrscheinlichkeit von f durch

$$P[f] = \Omega[f]/\Omega_\Gamma$$

ist, wobei wir mit Ω_Γ das für uns relevante Gesamtvolumen des Γ -Raumes bezeichnet. Wir interessieren uns nur für f s mit konstanter Energie E und entsprechend ist Ω_Γ auch nur das Volumen des Γ -Raumes, welches zur Energie E gehört. Um das wahrscheinlichste f zu finden, suchen wir also das Maximum von $\Omega[f]$ bzw. von

$$\ln \Omega = \ln N! - \sum_{i=1}^k \ln n_i! + \text{const.}$$

bezüglich der $\{n_i\}$ unter den Nebenbedingungen

$$\sum_i n_i = N, \quad \sum_i E_i n_i = E$$

wobei E_i die Energie zur Zelle i ist. Dazu benutzen wir die Stirling-Formel

$$\ln n! \simeq n \cdot (\ln n - 1)$$

sowie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (welche wir hier α und β nennen):

$$\delta_{\alpha, \beta, \{n_i\}} \left\{ - \sum_i n_i (\ln n_i - 1) - \alpha \left(\sum_i n_i - N \right) - \beta \left(\sum_i E_i n_i - E \right) \right\} = 0$$

Wir müssen also gleichzeitig

$$\partial_\alpha \{\dots\} = 0, \quad \partial_\beta \{\dots\} = 0, \quad \text{und} \quad \partial_{n_i} \{\dots\} = 0$$

lösen. Die k letzten Gleichungen lauten

$$-\ln n_i - \alpha - \beta E_i = 0,$$

was

$$n_i = e^{-\alpha - \beta E_i}$$

liefert. Wegen $f_i = n_i/\omega$ sehen wir, dass wir die Maxwell-Boltzmann Verteilung gefunden haben.

$$f \sim n_i = A \cdot e^{-\beta E_i}$$

Die ersten beiden Gleichungen sichern korrekte Gesamtteilchenzahl und Gesamtenergie, durch die richtige Wahl der “Konstanten” α und β der Verteilung n_i . Dieses Resultat stützt wiederum die Gleichwahrscheinlichkeitsannahme.

12.6 Das kanonische Ensemble

System + Reservoir ($\equiv$ Wärmebad)

Gesamtsystem:
 $E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 = \text{const.}$

Konkret im Fall unseres Gases sind also V_1 , V_2 , sowie die zugehörigen Teilchenzahlen N und M fixiert. Nur die Energie im System nicht.

Ein Energieaustausch mit dem Reservoir ist erlaubt, ein Teilchenaustausch nicht.

Aber: Gesamtenergie $E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 = \text{const.}$

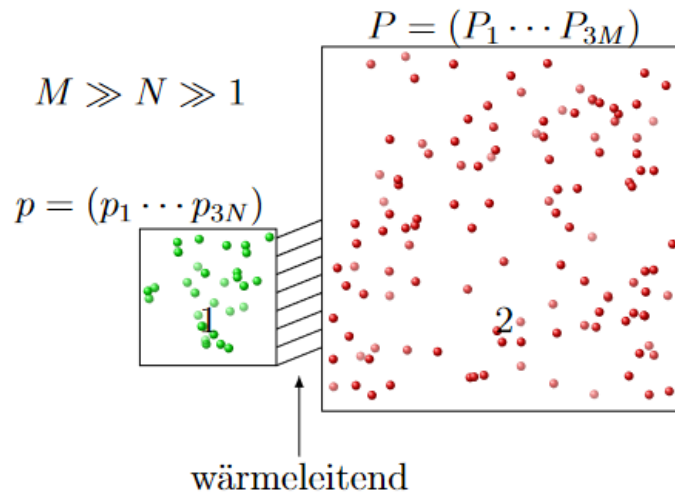


Abbildung 39: System (1) durch wärmeleitende Wand im Kontakt mit Wärmereservoir (2).

Berechne Erwartungswert einer Observablen $F = F(\vec{p})$ des Systems (1). Dazu berechnen wir $\langle F \rangle$ nach den Regeln für das mikrokanonische Ensemble des Gesamtsystems.

$$\langle F \rangle = C \cdot \int d^{3N} \vec{p} d^{3M} \vec{P} F(\vec{p}) \cdot \delta(E_{\text{tot}} - H_1(\vec{p}) - H_2(\vec{P}))$$

$\rightarrow C$ - normierender Faktor (einschließlich Integrale über V_1 , V_2)

Wir können als einfache Hamilton-Funktionen z.B.

$$H_1(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$H_2(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{3M} \frac{P_i^2}{2m}$$

annehmen.

Betrachte Observable $F(\vec{p})$.

Wichtige Nebenrechnung:

$$\langle F \rangle = C \cdot \int d^{3N} \vec{p} \int d^{3M} \vec{P} \cdot F(\vec{p}) \delta(E_{tot} - H_1(\vec{p}) - H_2(\vec{P}))$$

$$I \equiv \int d^{3M} \vec{P} \delta(E_{tot} - E_1 - H_2(\vec{P}))$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{2m(E_{tot} - E_1)} \equiv R \hat{=} \text{Radius einer Sphäre}$$

$$I \equiv \text{Oberfläche einer Sphäre im } \mathbb{R}^{3M}$$

$$I \sim R^{3M-1} \sim R^{3M}$$

$$I \sim (E_{tot} - E_1)^{\frac{3M}{2}} \sim \left(1 - \frac{E_1}{E_{tot}}\right)^{\frac{3M}{2}}$$